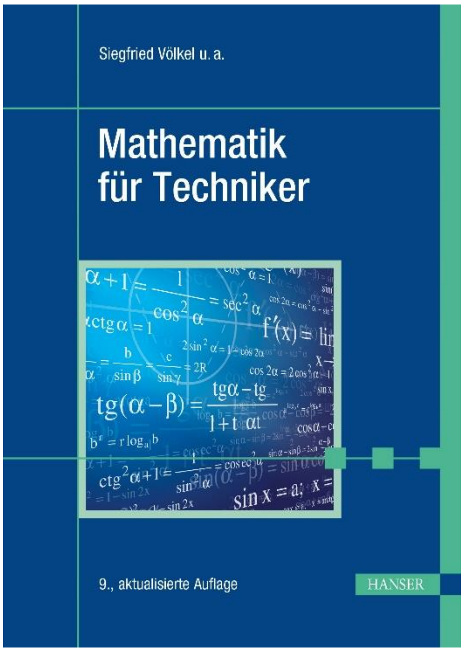
HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik für Techniker

von Siegfried Völkel u.a.

Print-ISBN: 978-3-446-48022-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-48075-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446480223
sowie im Buchhandel

Vorwort

Vorwort zur 9. Auflage

Die vorliegende 9. Auflage wurde durchgesehen und aktualisiert. Des Weiteren wurden Lesereinschriften berücksichtigt, entsprechende Änderungen vorgenommen und Fehler behoben.

Leipzig, Mühlhausen, Halle und Berlin, im April 2024 — Die Verfasser

Vorwort zur 7. Auflage

Die 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Technikerausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen" nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen". Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen" wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung" wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion" wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung" wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung" und „Einführung in die Statistik". Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuauflage wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen" aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Technikerausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritzsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Technikerausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014 Die Verfasser

Inhalt

1 Rechenoperationen

1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

1.1.0 Vorbemerkung

Die Mengenlehre hat sich seit ihrer Begründung durch Georg Cantor (1845–1918) zu einer grundlegenden mathematischen Disziplin entwickelt. Viele Gebiete der Mathematik und der Logik wurden durch sie entscheidend beeinflusst.

Die Logik ist eine Wissenschaft, in der die allgemeinste Struktur des richtigen Denkens untersucht wird.

Mithilfe der Mengenlehre und Logik lassen sich mathematische Zusammenhänge präzise und übersichtlich darstellen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Grundbegriffe und -beziehungen aus beiden Gebieten eingeführt. Ihre Anwendung in den folgenden Abschnitten wird mit dazu beitragen, das Erkennen der dargestellten Zusammenhänge zu erleichtern.

1.1.1 Begriff der Menge

Für den Mengenbegriff gab Cantor die *Erklärung*

> Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung M bestimmter, wohlunterschiedener Objekte m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte m heißen die **Elemente** von M.

Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Elemente einer Menge werden durch geschweifte Klammern zusammengefasst.

Ein Objekt a ist entweder ein Element einer Menge M oder nicht. Man schreibt:

$a \in M$, gelesen „a (ist) Element (von) M“;
$a \notin N$, gelesen „a (ist) nicht Element (von) N“.

Beispiele

1.1 Die Menge M aller positiven Zahlen, die Teiler von 12 sind: $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$. Es ist z. B. $3 \in M$, aber $5 \notin M$.

1.2 Die Menge L aller Lösungen der Gleichung $x^2 = 16 : L = \{-4;\ 4\}$.

1.3 Die Menge K aller Primzahlen enthält unendlich viele Elemente: $K = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ \dots\}$.

1.4 Die Menge P aller geraden Primzahlen enthält nur ein Element: $P = \{2\}$.

1.5 Die Menge B aller Hauptstädte der deutschen Bundesländer enthält 16 Elemente: $B = \{\text{Hauptstadt Bremen; Dresden; München; \dots Stuttgart}\}$. Es ist „Schwerin“ $\in B$, aber „Meißen“ $\notin B$. ■

Während die Umgangssprache unter einer Menge eine Vielzahl von Elementen versteht, können Mengen im Sinne der angegebenen Erklärung auch aus wenigen Elementen bzw. aus keinem Element bestehen.

Eine Menge, die nur ein Element enthält, heißt Einermenge. Wenn sie zwei verschiedene Elemente enthält, heißt sie Zweiermenge usw. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (Symbol: $\emptyset$). Es ist $\emptyset = \{\ \}$.

Beispiele

1.6 Die Gleichung $x^2 = -4$ hat keine reelle Lösung (denn das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein). Die Menge ihrer Lösungen ist leer: $L_1 = \{\ \} = \emptyset$.

1.7 Die Gleichung $2x = 0$ hat die Lösung 0 (denn $2 \cdot 0 = 0$). Die Menge ihrer Lösungen ist die Einermenge $L_2 = \{0\}$. L_2 ist nicht die leere Menge, denn sie enthält ein Element (die Zahl 0), während L_1 in *Beispiel 1.6* kein Element enthält. ■

Zwischen den Begriffen der Mengenlehre und der Logik besteht ein enger Zusammenhang. Das gilt auch für den Begriff „Menge“.

Man kann das Prinzip der Mengenbildung mit den Begriffen „Aussage“ und „Aussageform“, die Grundbegriffe der Logik sind, erklären.

Eine **Aussage** ist ein Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt. Wenn der Sachverhalt richtig widergespiegelt wird, ist die Aussage **wahr**, anderenfalls ist sie **falsch**.

Die Eigenschaften „wahr (w)“ und „falsch (f)“ heißen **Wahrheitswerte**. Für Aussagen gilt der

Satz der Zweiwertigkeit 1.1
Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt also

1. keinen dritten Wahrheitswert,
2. keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Aussagen werden schriftlich (oder sprachlich) durch Aussagesätze ausgedrückt. Diese können auch mathematische Beziehungen sein.

Beispiele

1.8 „Dresden liegt an der Elbe.“ (w)

1.9 „7 ist durch 4 teilbar.“ (f)

1.10 $3 + 4 = 7$ (w)

1.11 $3 + 4 = 10$ (f)

1.12 $3 + 4 > 6$ (w)

1.13 $3 + 4 < 5$ (f) ■

Die *Beispiele 1.10* und *1.11* sind Gleichungen (weil sie ein Gleichheitszeichen enthalten), von denen die eine wahr und die andere falsch ist. Aus dem Begriff „Gleichung" kann demnach nicht auf den Wahrheitswert geschlossen werden. Entsprechendes gilt für die Ungleichungen in den *Beispielen 1.12* und *1.13*.

Aussagen sind daran erkennbar, dass sie einen (und nur einen) Wahrheitswert haben. Dieser lässt sich allerdings nicht immer feststellen.

Beispiele

1.14 $3 + 5$

1.15 „Komm her!"

1.16 H_2O

1.17 $ab + c$

1.18 $3 + 5 = 8$

1.19 „Der Monat März hat 30 Tage."

1.20 „Auf anderen Sternen gibt es vernunftbegabte Lebewesen."

1.21 „Am 1. Juni 1750 regnete es in Berlin." ■

Die *Beispiele 1.14* bis *1.17* sind keine Aussagen; *1.18* ist eine wahre, *1.19* eine falsche Aussage; *1.20* und *1.21* sind Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bzw. nicht mehr feststellbar ist.

Die Gebilde der beiden folgenden Beispiele haben keinen Wahrheitswert, sind also keine Aussagen. Sie werden aber zu Aussagen, wenn für u bzw. x Objekte (Städtenamen bzw. Zahlen) eingesetzt werden.

Beispiele

1.22 „u ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes." Wenn z. B. $u =$ „Dresden" ist, entsteht eine wahre Aussage, für $u =$ „Leipzig" ergibt sich eine falsche Aussage.

1.23 $x^2 = 16$ wird für $x = 4$ und für $x = -4$ zu einer wahren, für jede andere Zahl zu einer falschen Aussage. ■

Für $x^2 = 16$ könnte auch geschrieben werden: $(\ldots)^2 = 16$. Demnach steht x für eine Leerstelle in der Gleichung.

- Ein Zeichen, das für eine Leerstelle steht, heißt **Variable (Veränderliche)**.

  Mithilfe des Variablenbegriffs wird definiert:

- Eine **Aussageform** ist ein Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und durch Belegen dieser Variablen zu einer Aussage wird.

Die Gebilde in den *Beispielen 1.22* und *1.23* sind demnach Aussageformen.

Für die Objekte, mit denen die Variablen belegt werden können, ist ein Bereich zu wählen (**Grundbereich**), und zwar so, dass beim Belegen sinnvolle Aussagen entstehen (für *Beispiel 1.23* wären z. B. Städtenamen kein möglicher Grundbereich). Wenn sich beim Belegen einer Variablen eine wahre Aussage ergibt, so sagt man „die Aussageform wird erfüllt (gelöst)", und das Objekt heißt **Erfüllung (Lösung)** der Aussageform. Alle Lösungen können zu einer Menge zusammengefasst werden.

Prinzip der Mengenbildung

Wenn eine Aussageform für die Objekte eines Grundbereichs vorliegt, so bilden alle Objekte, die diese Aussageform erfüllen (lösen), eine **Menge**.

Die Aussageform drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Elemente der Menge aus. Wenn die Aussageform mit $H(x)$ bezeichnet wird (d. h. ein Gebilde, das die Variable x enthält, gelesen: „H von x"), so kann man schreiben:

$M = \{x\colon H(x)\}$, gelesen: „M ist die Menge aller (Elemente) x, für die $H(x)$ gilt".

Beispiele

1.22 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist B (siehe *Beispiel 1.5*).
Man kann schreiben $B = \{u\colon u$ ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes$\}$.

1.23 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist L (siehe *Beispiel 1.2*).
Es ist $L = \{\pm 4\} = \{x\colon x^2 = 16\}$, falls der Grundbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Wenn der Grundbereich auf die Menge der natürlichen Zahlen eingeschränkt wird, ändert sich die Lösungsmenge: $L_n = \{4\}$. ■

Mengen lassen sich demnach auf zwei Arten darstellen: durch Angabe der Elemente oder Angabe der die Menge definierenden Aussageform. Eine Menge heißt **Allmenge**, wenn sie alle Objekte des Grundbereichs enthält. Im *Abschnitt 1.1* dieses Buches wird sie mit U bezeichnet.

Beispiel

1.24 Grundbereich: Gesamtheit aller reellen Zahlen.
Es gilt $\{x\colon x + x = 2x\} = U$, denn die Gleichung wird durch jede reelle Zahl gelöst. ■

Kontrollfragen

1.1 Wie ist nach Cantor der Begriff der Menge erklärt?

1.2 Was ist eine Aussage, und woran ist sie erkennbar?

1.3 Was ist eine Variable?

1.4 Was ist eine Aussageform, und wie lässt sich mit ihrer Hilfe das Prinzip der Mengenbildung erklären?

Aufgaben: *1.1* und *1.2*

1.1.2 Relationen zwischen Mengen

Definition 1.1

Zwei Mengen A und B heißen **gleich** genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben.

Schreibweise: $A = B$, gelesen: „A (ist) gleich B".

A heißt **Teilmenge** von B genau dann, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Schreibweise: $A \subseteq B$, gelesen: „A (ist) Teilmenge von B".

Die Teilmengenrelation $A \subseteq B$ wird auch Inklusion genannt.

Mengen kann man durch Punktmengen in der Ebene veranschaulichen. Alle Punkte, die von einer geschlossenen Kurve begrenzt werden, sollen Elemente der Menge sein. In den *Bildern 1.1* und *1.2* sind $A \subseteq B$ und $A = B$ dargestellt. Die Rechteckfläche soll den Grundbereich (die Allmenge) U darstellen.

Folgerungen:

1. Wenn $A \subseteq B$ ist, so ist $B \supseteq A$. A wird auch Untermenge von B, und entsprechend B Obermenge von A, genannt.
2. Die Gleichheit $A = B$ ist ein Sonderfall von $A \subseteq B$. Es ist $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ ist, d. h., wenn jedes Element von A auch Element von B und jedes Element von B auch Element von A ist.
3. Wenn $A \subseteq B$ ist und B mindestens ein Element enthält, das nicht Element von A ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B: $A \subset B$.
4. Für die leere Menge, eine beliebige Menge A und die Allmenge gilt:

$$\emptyset \subseteq A; \quad A \subseteq U \tag{1.1}$$

Zwei Mengen A und B, für die weder die Teilmengen- noch die Gleichheitsrelation gilt, können gemeinsame Elemente haben, aber dann enthält jede Menge mindestens ein Element, das nicht Element der anderen Menge ist (*Bild 1.3*). Falls A und B keine gemeinsamen Elemente haben, heißen sie **disjunkte (elementfremde) Mengen** (*Bild 1.4*).

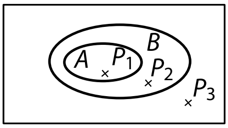


Bild 1.1

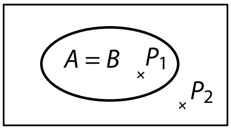


Bild 1.2

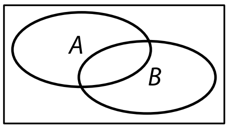


Bild 1.3

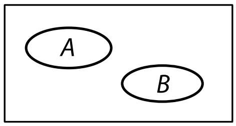


Bild 1.4

Beispiele

1.25 Grundbereich: $U = \{1; 2; \ldots; 20\}$ (Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 20).

Wenn $A = \{x\colon x \text{ ist teilbar durch } 6\} = \{6; 12; 18\}$ und
$B = \{x\colon x \text{ ist teilbar durch } 3\} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,
so ist $A \subseteq B$ (A ist sogar echte Teilmenge von B: $A \subset B$).

1.26 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Wenn A die Menge aller Quadrate ist und B die Menge aller gleichseitigen Rechtecke, also $A = \{x\colon x \text{ ist ein Quadrat}\}$, $B = \{x\colon x \text{ ist gleichseitiges Rechteck}\}$, so ist $A = B$.

1.27 Welche Relationen bestehen zwischen $P = \{3; 5; 7\}$, $Q = \{5; 7; 10\}$, $R = \{5; 7; 9; 10\}$ und $S = \{4; 6\}$?

Lösung: P und Q enthalten gemeinsame Elemente, es besteht aber keine Teilmengenrelation; für P und R gilt das Gleiche; P und S sind disjunkt. Es ist $Q \subset R$; Q und S und gleichfalls R und S sind disjunkt. ■

Zusammenhang mit logischen Operationen

In *Abschnitt 1.1.1* wurde festgestellt, dass zwischen Mengenlehre und Logik ein enger Zusammenhang besteht. Das gilt auch für die in diesem Abschnitt eingeführten Relationen:

(1) $A \subseteq B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.1*) „wenn $x \in A$ erfüllt ist, so muss auch $x \in B$ erfüllt sein“ (z. B. Punkt P_1), aber „wenn $x \in B$ erfüllt ist, so kann $x \in A$ erfüllt sein, muss aber nicht“ (z. B. liegen P_1 und P_2 beide in B, aber P_2 liegt nicht in A). In der Logik gibt es für zwei Aussagen (oder auch Aussageformen) p, q die Verknüpfung $p \Rightarrow q$. Sie heißt **Implikation** und wird gelesen „wenn p, so (muss) q“ (bei Vertauschen von p und q „wenn q, so kann p“). Die Bedingung p heißt hinreichend für q, q heißt notwendig für p. Zwischen Teilmengenrelation und Implikation besteht demnach der Zusammenhang:

$A \subseteq B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Rightarrow x \in B$ ($x \in B$ folgt aus $x \in A$).

Die Bedingung $x \in A$ ist hinreichend für $x \in B$, aber nicht notwendig; andererseits ist $x \in B$ notwendig für $x \in A$, aber nicht hinreichend. Für die Punktmengen in *Bild 1.1* bedeutet das: Damit ein Punkt in B liegt, ist es hinreichend, dass er in A liegt (P_1), aber nicht notwendig (auch P_2 liegt in B). Damit ein Punkt in A liegt, ist es notwendig, dass er in B liegt (denn wenn er nicht in B liegt, kann er auch nicht in A liegen: P_3); die Bedingung ist aber nicht hinreichend (P_2 liegt zwar in B, aber nicht in A).

(2) $A = B$: Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.2*) „wenn $x \in A$, so muss $x \in B$“ und auch „wenn $x \in B$, so muss $x \in A$“. In der Logik gibt es eine entsprechende Verknüpfung. Sie heißt **Äquivalenz** (Gleichwertigkeit): $p \Leftrightarrow q$, gelesen „genau dann q, wenn p“. Da $p \Leftrightarrow q$ sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ bedeutet, heißt jede der Bedingungen p, q ist notwendig und hinreichend für die andere.

Die Äquivalenz wird auch gelesen „dann und nur dann q, wenn p“.

Zwischen Gleichheitsrelation und Äquivalenz besteht demnach der Zusammenhang:

$A = B$ gilt genau dann, wenn $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Da äquivalente Aussageformen gleiche Mengen erklären, wird besonders die letzte Lesart genutzt, wenn ein neuer Begriff definiert wird.

Beispiele

1.28 Für die Mengen in *Beispiel 1.25* gilt wegen $A \subseteq B$ „x ist teilbar durch 6“ $A \Rightarrow B$ „x ist teilbar durch 3“. Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so muss sie auch durch 3 teilbar sein, d. h., die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 3 (aber keine notwendige). Andererseits gilt: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so kann sie durch 6 teilbar sein, d. h., Teilbarkeit durch 3 ist notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (aber keine hinreichende).

1.29 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Welche der beiden Bedingungen „x ist Rechteck“, „x ist Quadrat“ ist notwendige Bedingung für die andere?

Lösung: Für $R = \{x\colon x \text{ ist Rechteck}\}$ und $Q = \{x\colon x \text{ ist Quadrat}\}$ gilt $Q \subseteq R$. Folglich gilt für die Aussageformen „x ist Quadrat“ $\Rightarrow$ „x ist Rechteck“.

Da die notwendige Bedingung rechts vom Implikationszeichen steht, ist „x ist Rechteck“ eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für „x ist Quadrat“.

1.30 Die Bedingungen „x ist Rhombus“ und „x ist gleichseitiges Viereck“ sind miteinander zu vergleichen.

Lösung: Es ist $\{x\colon x \text{ ist Rhombus}\} = \{x\colon x \text{ ist gleichseitiges Viereck}\}$, folglich „$x$ ist Rhombus“ $\Leftrightarrow$ „x ist gleichseitiges Viereck“, d. h., „ein Viereck ist ein Rhombus genau dann, wenn es gleichseitig ist“. Jede der beiden Bedingungen ist notwendig und hinreichend für die andere.

Das Beispiel zeigt, wie mithilfe einer Äquivalenz ein Begriff (der Begriff „Rhombus“) definiert werden kann. ■

Kontrollfragen

1.5 Wie ist die Teilmengenrelation definiert?

1.6 Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Menge eine echte Teilmenge einer anderen ist?

1.7 Mithilfe welcher Wörter ist eine Implikation $p \Rightarrow q$ zu formulieren? Wie ist sie nach Vertauschen von p und q zu lesen? Welche Art von Bedingung sind p bzw. q?

1.8 Mithilfe welcher Wörter ist eine Äquivalenz zu formulieren? Welche Art von Bedingung sind p und q?

Aufgaben: *1.3* und *1.4*

1.1.3 Operationen mit Mengen

Bei einer Mengenoperation wird aus zwei Mengen eine neue gebildet. Die wichtigsten Operationen sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

Definition 1.2

Gegeben seien zwei Mengen A und B.

Der **Durchschnitt** $A \cap B$ (gelesen: „A geschnitten mit B") enthält alle Elemente, die gemeinsame Elemente von A und B sind (*Bild 1.5*).

Die **Vereinigung** $A \cup B$ (gelesen: „A vereinigt mit B") enthält alle Elemente, die Element von mindestens einer der Mengen A, B sind (*Bild 1.6*).

Die **Differenz** $A \setminus B$ (gelesen: „A ohne B") enthält alle Elemente von A, die nicht Element von B sind (*Bild 1.7*).

Entsprechend enthält $B \setminus A$ alle Elemente von B, die nicht Element von A sind (*Bild 1.8*).

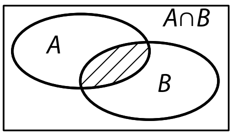


Bild 1.5

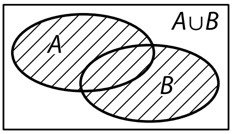


Bild 1.6

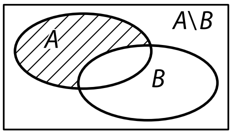


Bild 1.7

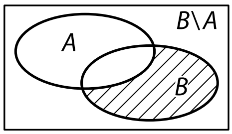


Bild 1.8

Beispiel

1.31 Mit $A = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ und $B = \{c;\ d;\ e;\ f\}$ sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmengen zu bilden.

Lösung:

$A \cap B = \{c;\ d\}$ $\quad$ $A \cup B = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f\}$

$A \setminus B = \{a;\ b\}$ $\quad$ $B \setminus A = \{e;\ f\}$ ■

Allgemein gilt (vgl. *Bilder* 1.5 bis 1.8):

$$A \cap B \subseteq A \cup B \tag{1.2}$$

$$A \setminus B \subseteq A; \quad B \setminus A \subseteq B \tag{1.3}$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)\,; \quad B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \tag{1.4}$$

Beispiele

1.32 Es seien $A = \{c;\ d\}$ und $B = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, d. h., $A \subseteq B$.
Dann ist

$$A \cap B = \{c;\ d\} = A; \quad A \cup B = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\} = B$$

und nach *Gln.* (1.4)

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{c;\ d\} \setminus \{c;\ d\} = \emptyset$$
$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\} \setminus \{c;\ d\} = \{a;\ b;\ e\}$$

1.33 Es seine $A = \{2;\ 4\}$ und $B = \{10;\ 12;\ 14\}$, d. h., A und B sind disjunkt.
Dann ist

$$A \cap B = \emptyset; \quad A \cup B = \{2;\ 4;\ 10;\ 12;\ 14\}$$
$$A \setminus B = \{2;\ 4\} \setminus \emptyset = \{2;\ 4\} = A$$
$$B \setminus A = \{10;\ 12;\ 14\} \setminus \emptyset = \{10;\ 12;\ 14\} = B$$ ■

Aus diesen Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge A Teilmenge einer Menge B ist, so ist der Durchschnitt gleich der Teilmenge, die Vereinigung gleich der Obermenge, und die Differenz $A \setminus B$ ist leer:

   $$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad A \setminus B = \emptyset$$

2. Wenn zwei Mengen A, B disjunkt sind, so ist der Durchschnitt leer ($A \cap B = \emptyset$). Für die Differenzmengen gilt:

   $$A \setminus B = A; \quad B \setminus A = B.$$

Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung von Mengen sind:

Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A \tag{1.5}$$

Assoziativität

$$A \cap \big(B \cap C\big) = (A \cap B) \cap C; \quad A \cup \big(B \cup C\big) = (A \cup B) \cup C \tag{1.6}$$

Distributivität

$$A \cap \big(B \cup C\big) = (A \cap B) \cup \big(A \cap C\big); \quad A \cup \big(B \cap C\big) = (A \cup B) \cap \big(A \cup C\big) \tag{1.7}$$

Idempotenz

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A \tag{1.8}$$

Kommutativität und Idempotenz sind offensichtlich, die beiden anderen Eigenschaften lassen sich an Beispielen leicht nachprüfen.

Die Differenz zweier Mengen ist i. Allg. weder kommutativ noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

Beispiel

1.34 Für $A = \{a;\ b;\ c;\ d\}$, $B = \{b;\ c;\ d;\ e\}$ und $C = \{c;\ d;\ e;\ f\}$ ist zu zeigen, dass die Differenz nicht assoziativ ist.

Lösung: Es ist

$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{b\} = \{a;\ c;\ d\}$

$(A \setminus B) \setminus C = \{a\} \setminus C = \{a\}$

$\{a;\ c;\ d\} \neq \{a\}$, d. h., $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ ■

Als letzte Mengenoperation wird das Bilden des Komplements eingeführt.

Definition 1.3

Das **Komplement** $\overline{A}$ einer Menge A enthält alle Elemente des Grundbereichs (der Allmenge U), die nicht Element von A sind (*Bild 1.9*).

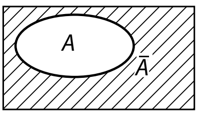


Bild 1.9

A und $\overline{A}$ sind demnach disjunkte Mengen: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Ferner gilt: $A \cup \overline{A} = U; \quad U \setminus A = \overline{A}; \quad U \setminus \overline{A} = A$.

Zweifache Komplementbildung hebt sich auf:

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{1.9}$$

Zusammenhang mit logischen Operationen

Eine Verknüpfung zweier Aussagen (oder Aussageformen) p und q, die ausdrückt, dass bei zwei Sachverhalten sowohl der eine als auch der andere gilt, heißt **Konjunktion** $p \wedge q$, gelesen: „p und q". Wenn von zwei Sachverhalten mindestens einer gilt, heißt die Verknüpfung **Alternative** $p \vee q$, gelesen: „p oder q". Mit Konjunktion und Alternative kann man Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definieren:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element des Durchschnitts, wenn es Element der einen „und (auch)" der anderen Menge ist);

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

(d. h., x ist genau dann ein Element der Vereinigung, wenn es ein Element der einen „oder" der anderen Menge ist (oder auch ein Element beider Mengen ist)).

Das Bindewort „oder" schließt bei der Alternative den Fall mit ein, dass beide Sachverhalte gelten. Deshalb wird es auch „einschließendes ‚oder'" genannt. Das Bindewort „oder" kann aber auch ausdrücken, dass nur einer der beiden Sachverhalte gilt („ausschließendes ‚oder'", „entweder – oder"), z. B. in dem Satz „Jede ganze Zahl ist (entweder) gerade oder ungerade". Eine Verknüpfung mit dem ausschließenden „oder" ist keine Alternative.

Eine Aussage (oder Aussageform) p, mit der zu einem gegebenen Sachverhalt der entgegengesetzte ausgedrückt wird, heißt **Negation** $\neg p$ (gelesen: „nicht p"). Sie entsteht aus p durch Vorsetzen von „es ist nicht wahr, dass …". Wenn eine Menge A die Lösungen der Aussageform $H(x)$ als Elemente hat, so wird das Komplement $\overline{A}$ aus den Lösungen der Negation von $H(x)$ gebildet.

Für die Negation von p ist auch die Schreibweise $\overline{p}$ üblich.

Beispiele

1.35 Für $M = \{x\colon x \text{ ist teilbar durch } 2\}$ und
$N = \{x\colon x \text{ ist teilbar durch } 3\}$ ergibt sich
$M \cap N = \{x\colon (x \text{ ist teilbar durch } 2) \wedge (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$,
d. h., $M \cap N$ enthält die durch 2 und durch 3 teilbaren, also die durch 6 teilbaren Zahlen:

$$M \cap N = \{0;\ 6;\ 12;\ \ldots\}.$$

Die Vereinigung ist $M \cup N = \{x\colon (x \text{ ist teilbar durch } 2) \vee (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$,
d. h., $M \cup N$. enthält die Zahlen, die durch 2 oder durch 3 (oder durch beide) teilbar sind:

$$M \cup N = \{0;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots\}.$$

1.36 Im Grundbereich $\{1;\ 2;\ \ldots;\ 10\}$ sei

$$A = \{x\colon x < 7\} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}.$$

Wenn die Aussageform „$x < 7$" negiert wird, ergibt sich „es ist nicht wahr, dass $x < 7$", kürzer „x ist nicht kleiner als 7" oder „$x \geqq 7$", und das Komplement der Menge A ist

$$\overline{A} = \{x : x \geqq 7\} = \{7;\ 8;\ 9;\ 10\}.$$ ■

Kontrollfragen

1.9 Mithilfe welcher logischer Verknüpfungen werden Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definiert?

1.10 Es sei A Teilmenge von B. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$, Vereinigung $A \cup B$ und Differenz $A \setminus B$?

1.11 Es seien A und B disjunkte Mengen. Was folgt daraus für Durchschnitt $A \cap B$ und die Differenzen $A \setminus B$, $B \setminus A$?

1.12 Welche Relation besteht zwischen Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen?

Aufgaben: *1.5* bis *1.10*

Sachwortverzeichnis

I

K

L

M

N

O

P

W

Z