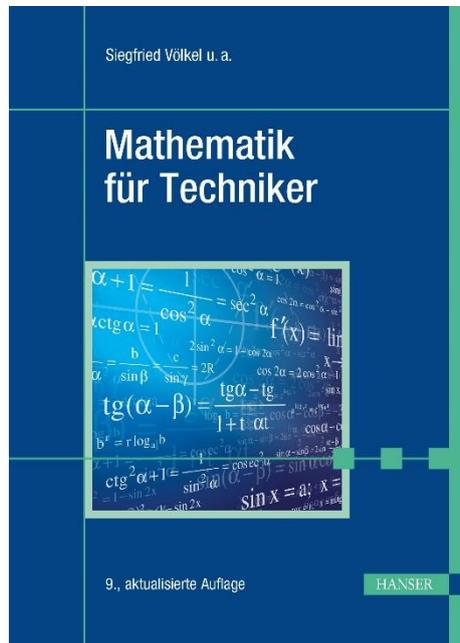


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Mathematik für Techniker

von Siegfried Völkel u.a.

Print-ISBN: 978-3-446-48022-3

E-Book-ISBN: 978-3-446-48075-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446480223>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

## ■ Vorwort zur 9. Auflage

Die vorliegende 9. Auflage wurde durchgesehen und aktualisiert. Des Weiteren wurden Lesereinschriften berücksichtigt, entsprechende Änderungen vorgenommen und Fehler behoben.

Leipzig, Mühlhausen, Halle und Berlin, im April 2024

Die Verfasser

## ■ Vorwort zur 7. Auflage

Die 7., neubearbeitete und erweiterte Auflage stellt eine umfangreiche Überarbeitung des in der Mathematikausbildung angehender Techniker bewährten Lehrbuches dar.

Der Inhalt orientiert sich an den Lehrplänen für die Techniker Ausbildung. Aus didaktischen Gründen folgt das Kapitel „Gleichungen und Ungleichungen“ nun direkt dem Kapitel „Rechenoperationen“. Der Abschnitt, der das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Determinanten behandelt, wurde im Umfang erhöht, dafür entfallen Rechenoperationen mit Matrizen. Die Kapitel Geometrie und Trigonometrie sind entsprechend den Lehrplananforderungen umfassend bearbeitet worden. Das Kapitel „Funktionen“ wurde neu strukturiert. Es schließen sich Zahlenfolgen und Grenzwerte an. Der Differenzial- und der Integralrechnung ist nun je ein eigenes Kapitel gewidmet, um die verschiedenen Grundanliegen dieser Teilgebiete der Infinitesimalrechnung hervorzuheben. Im Kapitel „Differenzialrechnung“ wird auch die geometrische Bedeutung der 2. Ableitung einer Funktion mit allen Konsequenzen zur Bestimmung von Maxima und Minima von Funktionen betrachtet. Der Abschnitt „Kurvendiskussion“ wurde vollständig überarbeitet. Neu aufgenommen wurde ein Abschnitt über das Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels Ableitungen. Im Kapitel „Integralrechnung“ wurden Abschnitte über die Integration durch Substitution sowie die Berechnung des Rauminhalts von Rotationskörpern ergänzt. Anschließend folgen die Kapitel „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Einführung in die Statistik“. Neu ist hier ein Bezug im Bereich der Anwendungsaufgaben auf Taschenrechner mit Computeralgebrasystem und auf Tabellenkalkulationssoftware. Die Inhalte zu komplexen Zahlen waren bisher auf verschiedene Abschnitte verteilt. In die Neuaufgabe wurde ein separates Kapitel „Komplexe Zahlen“ aufgenommen. Auf vielfachen Wunsch der Leser dieses Buches

wurde die „Vektorrechnung“ als neues Kapitel hinzugefügt. Die Bilder und Grafiken zur Illustration der dargestellten mathematischen Sachverhalte wurden teilweise neu erstellt, an der großen Anzahl von Beispielen wurde festgehalten.

Die Autoren, die sämtlich über ein hohes Maß an Erfahrung in der Technikerausbildung verfügen, haben sich um größtmögliche Verständlichkeit und Anschaulichkeit bemüht.

Durch die Art der Stoffdarbietung eignet sich das Buch sowohl für den Gebrauch im Unterricht als auch zum Selbststudium. Zu diesem Zweck wurden die Kontrollfragen, die sich jedem Abschnitt anschließen, beibehalten und die Anzahl der Aufgaben, die weitgehend anwendungsorientiert und praxisnah sind, erhöht. Am Kapitelende sind zur Selbstkontrolle die Lösungen der Aufgaben eingefügt.

Für Kritik, Korrekturen, Anregungen und Hinweise inhaltlicher und didaktischer Art ist das Autorenteam dankbar, soll dieses Buch doch aus der Unterrichtspraxis zur Praxis, d. h. zum Gelingen des Mathematikunterrichts und zum Lernerfolg der Studierenden, beitragen.

Ein besonderer Dank gilt der Lektorin Frau Christine Fritsch vom Fachbuchverlag Leipzig, der es gelungen ist, das fünfköpfige Autorenteam mit großer Geduld zu koordinieren und dafür zu sorgen, dass dieses Unterrichtswerk in einer neuen Auflage vorliegt. Auch Frau Katrin Wulst gebührt Dank für die technische Unterstützung und die Herstellung dieses Buches. Die Zusammenarbeit mit beiden Fachfrauen war stets sehr angenehm.

Möge dieses Buch dazu beitragen, dass die Vermittlung mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge im Rahmen der Technikerausbildung gelingt!

Leipzig, im Mai 2014

Die Verfasser

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Rechenoperationen</b> .....	<b>13</b>
1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik .....	13
1.1.0	Vorbemerkung .....	13
1.1.1	Begriff der Menge .....	13
1.1.2	Relationen zwischen Mengen .....	16
1.1.3	Operationen mit Mengen .....	19
1.2	Zahlenbereiche .....	23
1.2.0	Vorbemerkung .....	23
1.2.1	Bereich der reellen Zahlen und seine Teilbereiche .....	23
1.2.2	Zahlensysteme .....	25
1.2.3	Intervalle, absoluter Betrag, Runden von Zahlen .....	27
1.3	Rechenoperationen erster und zweiter Stufe .....	32
1.3.0	Vorbemerkung .....	32
1.3.1	Grundbegriffe .....	32
1.3.2	Rechenoperationen mit Zahlen .....	34
1.3.3	Algebraische Summen .....	35
1.3.4	Bruchrechnung .....	39
1.3.5	Proportionen .....	44
1.3.6	Summenzeichen .....	49
1.4	Rechenoperationen dritter Stufe .....	51
1.4.0	Vorbemerkung .....	51
1.4.1	Rechnen mit Potenzen und Wurzeln .....	51
1.4.2	Rechnen mit Logarithmen .....	61
1.4.3	Potenz eines Binoms .....	68
1.5	Aufgaben .....	71
1.6	Lösungen .....	80
<b>2</b>	<b>Gleichungen und Ungleichungen</b> .....	<b>86</b>
2.1	Gleichungen mit einer Variablen .....	86
2.1.0	Vorbemerkung .....	86
2.1.1	Grundbegriffe .....	86
2.1.2	Lösen von algebraischen Gleichungen .....	90
2.1.3	Lösen von transzendenten Gleichungen .....	99
2.1.4	Lösen von Gleichungen durch Näherungsverfahren .....	104
2.2	Ungleichungen .....	110
2.2.0	Vorbemerkung .....	110
2.2.1	Grundbegriffe .....	110
2.2.2	Einfache Typen linearer Ungleichungen .....	111
2.3	Lineare Gleichungssysteme .....	113
2.3.0	Vorbemerkung .....	113

2.3.1	Herkömmliche Lösungsverfahren .....	114
2.3.2	Lösbarkeitsbetrachtungen .....	117
2.3.3	Gauß'scher Algorithmus .....	120
2.3.4	Determinantenverfahren .....	125
2.4	Aufgaben .....	131
2.5	Lösungen .....	138
<b>3</b>	<b>Geometrie .....</b>	<b>143</b>
3.1	Planimetrie .....	143
3.1.0	Vorbemerkung .....	143
3.1.1	Grundbegriffe .....	143
3.1.2	Winkel an sich schneidenden Geraden .....	146
3.1.3	Bewegungen in der Ebene, Kongruenz, Symmetrie .....	147
3.1.4	Grundkonstruktionen .....	151
3.1.5	Ähnlichkeit .....	154
3.1.6	Allgemeines Dreieck .....	156
3.1.7	Rechtwinkliges, gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck ....	163
3.1.8	Viereck .....	166
3.1.9	Regelmäßiges $n$ -Eck .....	168
3.1.10	Kreis .....	170
3.1.11	Flächeninhalte .....	174
3.2	Stereometrie .....	180
3.2.0	Vorbemerkung .....	180
3.2.1	Quader .....	181
3.2.2	Prisma und Pyramide .....	183
3.2.3	Prismatoid .....	188
3.2.4	Zylinder und Kegel .....	190
3.2.5	Cavalierisches Prinzip .....	195
3.2.6	Kugel und Kugelteile .....	195
3.3	Aufgaben .....	200
3.4	Lösungen .....	208
<b>4</b>	<b>Trigonometrie .....</b>	<b>215</b>
4.1	Goniometrie .....	215
4.1.0	Vorbemerkung .....	215
4.1.1	Winkelmessung .....	215
4.1.2	Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck .....	216
4.1.3	Winkelfunktionen für beliebige Winkel .....	222
4.1.4	Quadrantenrelationen .....	225
4.1.5	Zusammenhang zwischen den Funktionswerten eines Winkels ..	231
4.1.6	Additionstheoreme .....	233
4.2	Dreiecksberechnung .....	237
4.2.1	Allgemeines .....	237
4.2.2	Sinus- und Kosinussatz .....	238
4.2.3	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung .....	244
4.2.4	Weitere Anwendungen .....	246
4.3	Aufgaben .....	252
4.4	Lösungen .....	258

**5 Funktionen . . . . . 263**

5.0 Vorbemerkung . . . . . 263

5.1 Der Funktionsbegriff . . . . . 263

    5.1.1 Die Definition einer Funktion . . . . . 263

    5.1.2 Darstellungsformen von Funktionen . . . . . 264

    5.1.3 Eigenschaften von Funktionen . . . . . 269

    5.1.4 Die Umkehrfunktion . . . . . 271

5.2 Lineare Funktionen (Geraden) . . . . . 274

    5.2.1 Die analytischen Darstellungsarten linearer Funktionen . . . . . 274

    5.2.2 Die lineare Funktion und ihre Umkehrfunktion . . . . . 277

    5.2.3 Lagebeziehungen zwischen Geraden . . . . . 279

5.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) . . . . . 283

    5.3.1 Die Darstellungsarten quadratischer Funktionen . . . . . 283

    5.3.2 Die Umwandlung zwischen den Darstellungsarten quadratischer Funktionen . . . . . 288

    5.3.3 Die Umkehrfunktion der quadratischen Funktion . . . . . 291

5.4 Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . . 293

    5.4.1 Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften . . . . . 293

    5.4.2 Wurzelfunktionen und ihre Eigenschaften . . . . . 295

5.5 Ganzrationale Funktionen . . . . . 296

5.6 Gebrochenrationale Funktionen . . . . . 300

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . . 303

    5.7.1 Exponentialfunktionen und ihre Eigenschaften . . . . . 303

    5.7.2 Logarithmusfunktionen und ihre Eigenschaften . . . . . 306

5.8 Trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen . . . . . 307

5.9 Der Einfluss von Funktionsparametern auf Funktionsgraphen . . . . . 313

5.10 Bestimmung von Funktionsgleichungen . . . . . 322

5.11 Aufgaben . . . . . 326

5.12 Lösungen . . . . . 333

**6 Zahlenfolgen . . . . . 341**

6.0 Vorbemerkung . . . . . 341

6.1 Grundbegriffe . . . . . 341

6.2 Arithmetische Folgen . . . . . 344

6.3 Geometrische Folgen . . . . . 348

6.4 Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge . . . . . 350

6.5 Grenzwert einer Zahlenfolge . . . . . 355

6.6 Grenzwert einer Funktion . . . . . 359

    6.6.1 Grenzwert einer Funktion an der Stelle  $x = a$  . . . . . 359

    6.6.2 Grenzwert einer Funktion für  $x \rightarrow \pm\infty$  . . . . . 363

6.7 Aufgaben . . . . . 364

6.8 Lösungen . . . . . 366

<b>7</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>369</b>
7.0	Vorbemerkung	369
7.1	Grundbegriffe	369
7.2	Ableitung der Potenzfunktion	374
7.3	Ableitung einer konstanten Funktion und einer Funktion mit konstantem Faktor	376
7.4	Ableitung einer Summe von Funktionen	376
7.5	Differenzial einer Funktion	377
7.6	Weitere Grundregeln der Differenzialrechnung	381
7.6.1	Ableitung eines Produktes von Funktionen	381
7.6.2	Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen	382
7.7	Regeln für die Ableitung weiterer Funktionen	384
7.8	Höhere Ableitungen	386
7.9	Geometrische Interpretation der ersten und zweiten Ableitung	387
7.10	Kurvendiskussion	392
7.11	Extremwertaufgaben	398
7.12	Aufstellen von Funktionsgleichungen mittels der Ableitungen	401
7.13	Aufgaben	404
7.14	Lösungen	407
<b>8</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>413</b>
8.0	Vorbemerkung	413
8.1	Unbestimmtes Integral	413
8.2	Bestimmtes Integral	416
8.3	Eigenschaften bestimmter Integrale	421
8.4	Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summenfolge	422
8.5	Flächeninhalte ebener Flächen zwischen einer Kurve und der $x$ -Achse	426
8.6	Flächen zwischen zwei Kurven	428
8.7	Integration durch Substitution	431
8.8	Der Rauminhalt von Rotationskörpern	433
8.9	Numerische Integration	436
8.10	Aufgaben	440
8.11	Lösungen	441
<b>9</b>	<b>Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>443</b>
9.0	Vorbemerkung	443
9.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	443
9.2	Wahrscheinlichkeitsbegriff	446
9.3	Anzahl von Ergebnissen und Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche	453
9.4	Simulation von Zufallsversuchen	466
9.5	Aufgaben	471
9.6	Lösungen	473

**10 Einführung in die Statistik . . . . . 475**

10.0 Vorbemerkung . . . . . 475  
 10.1 Statistische Erhebung, Auswertung und Darstellung von Daten . . . . . 475  
 10.2 Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . . 495  
 10.3 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung . . . . . 499  
 10.4 Binomialverteilte Zufallsgrößen . . . . . 502  
 10.5 Anwendungen zur Binomialverteilung . . . . . 504  
 10.6 Aufstellen und Testen von Hypothesen . . . . . 510  
 10.7 Anwendungsaufgaben . . . . . 514  
 10.8 Die Poisson-Verteilung . . . . . 516  
 10.9 Die Normalverteilung . . . . . 519  
 10.10 Anwendungen der Normalverteilung . . . . . 524  
 10.11 Exponentialverteilung . . . . . 526  
 10.12 Aufgaben . . . . . 527  
 10.13 Lösungen . . . . . 532

**11 Komplexe Zahlen . . . . . 537**

11.0 Vorbemerkung . . . . . 537  
 11.1 Die arithmetische Form der komplexen Zahlen . . . . . 537  
     11.1.1 Imaginäre und komplexe Zahlen . . . . . 537  
     11.1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen in der arithmetischen Form . . . . . 541  
     11.1.3 Die Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlen-  
         ebene . . . . . 544  
 11.2 Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen . . . . . 546  
 11.3 Die Exponentialform der komplexen Zahlen . . . . . 550  
     11.3.1 Die Multiplikation und die Division komplexer Zahlen in der Ex-  
         ponentialform . . . . . 550  
     11.3.2 Das Potenzieren, das Radizieren und das Logarithmieren kom-  
         plexer Zahlen . . . . . 552  
 11.4 Aufgaben . . . . . 555  
 11.5 Lösungen . . . . . 556

**12 Vektorrechnung . . . . . 560**

12.0 Vorbemerkung . . . . . 560  
 12.1 Punkte und Vektoren im kartesischen Koordinatensystem . . . . . 560  
     12.1.1 Punkte im kartesischen Koordinatensystem . . . . . 560  
     12.1.2 Vektoren im kartesischen Koordinatensystem . . . . . 561  
 12.2 Rechnen mit Vektoren . . . . . 565  
     12.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . . 565  
     12.2.2 Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen . . . . . 568  
     12.2.3 Das Skalarprodukt . . . . . 570  
     12.2.4 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) . . . . . 576  
 12.3 Die vektorielle Beschreibung von Geraden . . . . . 579  
     12.3.1 Die Vektorgleichung einer Geraden . . . . . 579  
     12.3.2 Die Lagebeziehungen zwischen Geraden . . . . . 581  
 12.4 Die vektorielle Beschreibung von Ebenen . . . . . 584  
     12.4.1 Die Vektorgleichung einer Ebene . . . . . 584

12.4.2	Die Lagebeziehungen zwischen einer Ebene und einer Geraden ..	588
12.4.3	Die Lagebeziehung zwischen Ebenen .....	590
12.4.4	Der Normalenvektor einer Ebene .....	594
12.5	Aufgaben .....	598
12.6	Lösungen .....	605
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>		<b>609</b>

# 1

## Rechenoperationen

### ■ 1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

#### 1.1.0 Vorbemerkung

Die Mengenlehre hat sich seit ihrer Begründung durch Georg Cantor (1845–1918) zu einer grundlegenden mathematischen Disziplin entwickelt. Viele Gebiete der Mathematik und der Logik wurden durch sie entscheidend beeinflusst.

Die Logik ist eine Wissenschaft, in der die allgemeinste Struktur des richtigen Denkens untersucht wird.

Mithilfe der Mengenlehre und Logik lassen sich mathematische Zusammenhänge präzise und übersichtlich darstellen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Grundbegriffe und -beziehungen aus beiden Gebieten eingeführt. Ihre Anwendung in den folgenden Abschnitten wird mit dazu beitragen, das Erkennen der dargestellten Zusammenhänge zu erleichtern.

#### 1.1.1 Begriff der Menge

Für den Mengenbegriff gab Cantor die *Erklärung*

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung  $M$  bestimmter, wohlunterschiedener Objekte  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte  $m$  heißen die **Elemente** von  $M$ .

Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Die Elemente einer Menge werden durch geschweifte Klammern zusammengefasst.

Ein Objekt  $a$  ist entweder ein Element einer Menge  $M$  oder nicht. Man schreibt:

$a \in M$ , gelesen „ $a$  (ist) Element (von)  $M$ “;  
 $a \notin N$ , gelesen „ $a$  (ist) nicht Element (von)  $N$ “.

#### Beispiele

- 1.1 Die Menge  $M$  aller positiven Zahlen, die Teiler von 12 sind:  $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ . Es ist z. B.  $3 \in M$ , aber  $5 \notin M$ .
- 1.2 Die Menge  $L$  aller Lösungen der Gleichung  $x^2 = 16$ :  $L = \{-4; 4\}$ .

- 1.3 Die Menge  $K$  aller Primzahlen enthält unendlich viele Elemente:  $K = \{2; 3; 5; 7; \dots\}$ .
- 1.4 Die Menge  $P$  aller geraden Primzahlen enthält nur ein Element:  $P = \{2\}$ .
- 1.5 Die Menge  $B$  aller Hauptstädte der deutschen Bundesländer enthält 16 Elemente:  $B = \{\text{Hauptstadt Bremen; Dresden; München; } \dots \text{ Stuttgart}\}$ . Es ist „Schwerin“  $\in B$ , aber „Meißen“  $\notin B$ . ■

Während die Umgangssprache unter einer Menge eine Vielzahl von Elementen versteht, können Mengen im Sinne der angegebenen Erklärung auch aus wenigen Elementen bzw. aus keinem Element bestehen.

Eine Menge, die nur ein Element enthält, heißt Einermenge. Wenn sie zwei verschiedene Elemente enthält, heißt sie Zweiermenge usw. Eine Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** (Symbol:  $\emptyset$ ). Es ist  $\emptyset = \{ \}$ .

### Beispiele

- 1.6 Die Gleichung  $x^2 = -4$  hat keine reelle Lösung (denn das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein). Die Menge ihrer Lösungen ist leer:  $L_1 = \{ \} = \emptyset$ .
- 1.7 Die Gleichung  $2x = 0$  hat die Lösung 0 (denn  $2 \cdot 0 = 0$ ). Die Menge ihrer Lösungen ist die Einermenge  $L_2 = \{0\}$ .  $L_2$  ist nicht die leere Menge, denn sie enthält ein Element (die Zahl 0), während  $L_1$  in *Beispiel 1.6* kein Element enthält. ■

Zwischen den Begriffen der Mengenlehre und der Logik besteht ein enger Zusammenhang. Das gilt auch für den Begriff „Menge“.

Man kann das Prinzip der Mengenbildung mit den Begriffen „Aussage“ und „Aussageform“, die Grundbegriffe der Logik sind, erklären.

Eine **Aussage** ist ein Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt. Wenn der Sachverhalt richtig wiederspiegelt wird, ist die Aussage **wahr**, anderenfalls ist sie **falsch**.

Die Eigenschaften „wahr (w)“ und „falsch (f)“ heißen **Wahrheitswerte**. Für Aussagen gilt der

### Satz der Zweiwertigkeit 1.1

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Es gibt also

1. keinen dritten Wahrheitswert,
2. keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Aussagen werden schriftlich (oder sprachlich) durch Aussagesätze ausgedrückt. Diese können auch mathematische Beziehungen sein.

### Beispiele

- 1.8 „Dresden liegt an der Elbe.“ (w)
- 1.9 „7 ist durch 4 teilbar.“ (f)
- 1.10  $3 + 4 = 7$  (w)
- 1.11  $3 + 4 = 10$  (f)

1.12  $3 + 4 > 6$  (w)

1.13  $3 + 4 < 5$  (f) ■

Die *Beispiele 1.10* und *1.11* sind Gleichungen (weil sie ein Gleichheitszeichen enthalten), von denen die eine wahr und die andere falsch ist. Aus dem Begriff „Gleichung“ kann demnach nicht auf den Wahrheitswert geschlossen werden. Entsprechendes gilt für die Ungleichungen in den *Beispielen 1.12* und *1.13*.

Aussagen sind daran erkennbar, dass sie einen (und nur einen) Wahrheitswert haben. Dieser lässt sich allerdings nicht immer feststellen.

### Beispiele

1.14  $3 + 5$

1.15 „Komm her!“

1.16  $H_2O$ 1.17  $ab + c$ 

1.18  $3 + 5 = 8$

1.19 „Der Monat März hat 30 Tage.“

1.20 „Auf anderen Sternen gibt es vernunftbegabte Lebewesen.“

1.21 „Am 1. Juni 1750 regnete es in Berlin.“ ■

Die *Beispiele 1.14* bis *1.17* sind keine Aussagen; *1.18* ist eine wahre, *1.19* eine falsche Aussage; *1.20* und *1.21* sind Aussagen, deren Wahrheitswert noch nicht bzw. nicht mehr feststellbar ist.

Die Gebilde der beiden folgenden Beispiele haben keinen Wahrheitswert, sind also keine Aussagen. Sie werden aber zu Aussagen, wenn für  $u$  bzw.  $x$  Objekte (Städtenamen bzw. Zahlen) eingesetzt werden.

### Beispiele

1.22 „ $u$  ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes.“ Wenn z. B.  $u =$  „Dresden“ ist, entsteht eine wahre Aussage, für  $u =$  „Leipzig“ ergibt sich eine falsche Aussage.1.23  $x^2 = 16$  wird für  $x = 4$  und für  $x = -4$  zu einer wahren, für jede andere Zahl zu einer falschen Aussage. ■

Für  $x^2 = 16$  könnte auch geschrieben werden:  $(\dots)^2 = 16$ . Demnach steht  $x$  für eine Leerstelle in der Gleichung.

- Ein Zeichen, das für eine Leerstelle steht, heißt **Variable (Veränderliche)**. Mithilfe des Variablenbegriffs wird definiert:
- Eine **Aussageform** ist ein Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und durch Belegen dieser Variablen zu einer Aussage wird.

Die Gebilde in den *Beispielen 1.22* und *1.23* sind demnach Aussageformen.

Für die Objekte, mit denen die Variablen belegt werden können, ist ein Bereich zu wählen (**Grundbereich**), und zwar so, dass beim Belegen sinnvolle Aussagen entstehen (für *Beispiel 1.23* wären z. B. Städtenamen kein möglicher Grundbereich). Wenn sich beim Belegen einer Variablen eine wahre Aussage ergibt, so sagt man „die Aussageform wird erfüllt (gelöst)“, und das Objekt heißt **Erfüllung (Lösung)** der Aussageform. Alle Lösungen können zu einer Menge zusammengefasst werden.

**Prinzip der Mengenbildung**

Wenn eine Aussageform für die Objekte eines Grundbereichs vorliegt, so bilden alle Objekte, die diese Aussageform erfüllen (lösen), eine **Menge**.

Die Aussageform drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Elemente der Menge aus. Wenn die Aussageform mit  $H(x)$  bezeichnet wird (d. h. ein Gebilde, das die Variable  $x$  enthält, gelesen: „ $H$  von  $x$ “), so kann man schreiben:

$$M = \{x: H(x)\}, \quad \text{gelesen: „}M \text{ ist die Menge aller (Elemente) } x, \text{ für die } H(x) \text{ gilt“}.$$

**Beispiele**

- 1.22 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist  $B$  (siehe *Beispiel 1.5*).  
Man kann schreiben  $B = \{u: u \text{ ist Hauptstadt eines deutschen Bundeslandes}\}$ .
- 1.23 (Fortsetzung) Die Lösungsmenge ist  $L$  (siehe *Beispiel 1.2*).  
Es ist  $L = \{\pm 4\} = \{x: x^2 = 16\}$ , falls der Grundbereich die Menge der reellen Zahlen ist. Wenn der Grundbereich auf die Menge der natürlichen Zahlen eingeschränkt wird, ändert sich die Lösungsmenge:  $L_n = \{4\}$ . ■

Mengen lassen sich demnach auf zwei Arten darstellen: durch Angabe der Elemente oder Angabe der die Menge definierenden Aussageform. Eine Menge heißt **Allmenge**, wenn sie alle Objekte des Grundbereichs enthält. Im *Abschnitt 1.1* dieses Buches wird sie mit  $U$  bezeichnet.

**Beispiel**

- 1.24 Grundbereich: Gesamtheit aller reellen Zahlen.  
Es gilt  $\{x: x + x = 2x\} = U$ , denn die Gleichung wird durch jede reelle Zahl gelöst. ■

**Kontrollfragen**

- 1.1 Wie ist nach Cantor der Begriff der Menge erklärt?
- 1.2 Was ist eine Aussage, und woran ist sie erkennbar?
- 1.3 Was ist eine Variable?
- 1.4 Was ist eine Aussageform, und wie lässt sich mit ihrer Hilfe das Prinzip der Mengenbildung erklären?

**Aufgaben: 1.1 und 1.2**

**1.1.2 Relationen zwischen Mengen****Definition 1.1**

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **gleich** genau dann, wenn sie dieselben Elemente haben.

Schreibweise:  $A = B$ , gelesen: „ $A$  (ist) gleich  $B$ “.

$A$  heißt **Teilmenge** von  $B$  genau dann, wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist.

Schreibweise:  $A \subseteq B$ , gelesen: „ $A$  (ist) Teilmenge von  $B$ “.

Die Teilmengenrelation  $A \subseteq B$  wird auch Inklusion genannt.

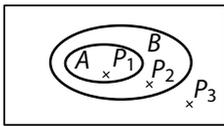
Mengen kann man durch Punktmenge in der Ebene veranschaulichen. Alle Punkte, die von einer geschlossenen Kurve begrenzt werden, sollen Elemente der Menge sein. In den *Bildern 1.1* und *1.2* sind  $A \subseteq B$  und  $A = B$  dargestellt. Die Rechteckfläche soll den Grundbereich (die Allmenge)  $U$  darstellen.

Folgerungen:

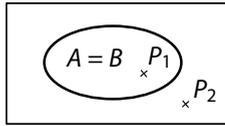
1. Wenn  $A \subseteq B$  ist, so ist  $B \supseteq A$ .  $A$  wird auch Untermenge von  $B$ , und entsprechend  $B$  Obermenge von  $A$ , genannt.
2. Die Gleichheit  $A = B$  ist ein Sonderfall von  $A \subseteq B$ . Es ist  $A = B$  genau dann, wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  ist, d. h., wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  und jedes Element von  $B$  auch Element von  $A$  ist.
3. Wenn  $A \subseteq B$  ist und  $B$  mindestens ein Element enthält, das nicht Element von  $A$  ist, so heißt  $A$  **echte Teilmenge** von  $B$ :  $A \subset B$ .
4. Für die leere Menge, eine beliebige Menge  $A$  und die Allmenge gilt:

$$\emptyset \subseteq A; \quad A \subseteq U \tag{1.1}$$

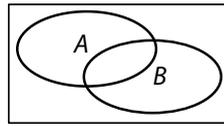
Zwei Mengen  $A$  und  $B$ , für die weder die Teilmengen- noch die Gleichheitsrelation gilt, können gemeinsame Elemente haben, aber dann enthält jede Menge mindestens ein Element, das nicht Element der anderen Menge ist (*Bild 1.3*). Falls  $A$  und  $B$  keine gemeinsamen Elemente haben, heißen sie **disjunkte (elementfremde) Mengen** (*Bild 1.4*).



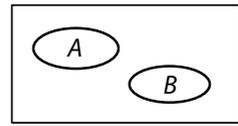
**Bild 1.1**



**Bild 1.2**



**Bild 1.3**



**Bild 1.4**

**Beispiele**

1.25 Grundbereich:  $U = \{1; 2; \dots; 20\}$  (Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 20).

Wenn  $A = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 6\} = \{6; 12; 18\}$  und  
 $B = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\} = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ ,  
 so ist  $A \subseteq B$  ( $A$  ist sogar echte Teilmenge von  $B$ :  $A \subset B$ ).

1.26 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Wenn  $A$  die Menge aller Quadrate ist und  $B$  die Menge aller gleichseitigen Rechtecke, also  
 $A = \{x: x \text{ ist ein Quadrat}\}$ ,  $B = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Rechteck}\}$ , so ist  $A = B$ .

1.27 Welche Relationen bestehen zwischen  $P = \{3; 5; 7\}$ ,  $Q = \{5; 7; 10\}$ ,  $R = \{5; 7; 9; 10\}$  und  $S = \{4; 6\}$ ?

*Lösung:*  $P$  und  $Q$  enthalten gemeinsame Elemente, es besteht aber keine Teilmengenrelation; für  $P$  und  $R$  gilt das Gleiche;  $P$  und  $S$  sind disjunkt. Es ist  $Q \subset R$ ;  $Q$  und  $S$  und gleichfalls  $R$  und  $S$  sind disjunkt. ■

**Zusammenhang mit logischen Operationen**

In *Abschnitt 1.1.1* wurde festgestellt, dass zwischen Mengenlehre und Logik ein enger Zusammenhang besteht. Das gilt auch für die in diesem Abschnitt eingeführten Relationen:

- (1)  $A \subseteq B$ : Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.1*) „wenn  $x \in A$  erfüllt ist, so muss auch  $x \in B$  erfüllt sein“ (z. B. Punkt  $P_1$ ), aber „wenn  $x \in B$  erfüllt ist, so kann  $x \in A$  erfüllt sein, muss aber nicht“ (z. B. liegen  $P_1$  und  $P_2$  beide in  $B$ , aber  $P_2$  liegt nicht in  $A$ ). In der Logik gibt es für zwei Aussagen (oder auch Aussageformen)  $p, q$  die Verknüpfung  $p \Rightarrow q$ . Sie heißt **Implikation** und wird gelesen „wenn  $p$ , so (muss)  $q$ “ (bei Vertauschen von  $p$  und  $q$  „wenn  $q$ , so kann  $p$ “). Die Bedingung  $p$  heißt hinreichend für  $q$ ,  $q$  heißt notwendig für  $p$ . Zwischen Teilmengenrelation und Implikation besteht demnach der Zusammenhang:

$A \subseteq B$  gilt genau dann, wenn  $x \in A \Rightarrow x \in B$  ( $x \in B$  folgt aus  $x \in A$ ).

Die Bedingung  $x \in A$  ist hinreichend für  $x \in B$ , aber nicht notwendig; andererseits ist  $x \in B$  notwendig für  $x \in A$ , aber nicht hinreichend. Für die Punktmenge in *Bild 1.1* bedeutet das: Damit ein Punkt in  $B$  liegt, ist es hinreichend, dass er in  $A$  liegt ( $P_1$ ), aber nicht notwendig (auch  $P_2$  liegt in  $B$ ). Damit ein Punkt in  $A$  liegt, ist es notwendig, dass er in  $B$  liegt (denn wenn er nicht in  $B$  liegt, kann er auch nicht in  $A$  liegen:  $P_3$ ); die Bedingung ist aber nicht hinreichend ( $P_2$  liegt zwar in  $B$ , aber nicht in  $A$ ).

- (2)  $A = B$ : Für alle Elemente des Grundbereichs gilt (vgl. *Bild 1.2*) „wenn  $x \in A$ , so muss  $x \in B$ “ und auch „wenn  $x \in B$ , so muss  $x \in A$ “. In der Logik gibt es eine entsprechende Verknüpfung. Sie heißt **Äquivalenz** (Gleichwertigkeit):  $p \Leftrightarrow q$ , gelesen „genau dann  $q$ , wenn  $p$ “. Da  $p \Leftrightarrow q$  sowohl  $p \Rightarrow q$  als auch  $q \Rightarrow p$  bedeutet, heißt jede der Bedingungen  $p, q$  ist notwendig und hinreichend für die andere.

Die Äquivalenz wird auch gelesen „dann und nur dann  $q$ , wenn  $p$ “.

Zwischen Gleichheitsrelation und Äquivalenz besteht demnach der Zusammenhang:

$A = B$  gilt genau dann, wenn  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

Da äquivalente Aussageformen gleiche Mengen erklären, wird besonders die letzte Lesart genutzt, wenn ein neuer Begriff definiert wird.

### Beispiele

- 1.28 Für die Mengen in *Beispiel 1.25* gilt wegen  $A \subseteq B$  „ $x$  ist teilbar durch 6“  $A \subseteq B$  „ $x$  ist teilbar durch 3“. Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, so muss sie auch durch 3 teilbar sein, d. h., die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit durch 3 (aber keine notwendige). Andererseits gilt: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so kann sie durch 6 teilbar sein, d. h., Teilbarkeit durch 3 ist notwendige Bedingung für die Teilbarkeit durch 6 (aber keine hinreichende).

- 1.29 Grundbereich: Menge aller Vierecke.

Welche der beiden Bedingungen „ $x$  ist Rechteck“, „ $x$  ist Quadrat“ ist notwendige Bedingung für die andere?

*Lösung:* Für  $R = \{x: x \text{ ist Rechteck}\}$  und  $Q = \{x: x \text{ ist Quadrat}\}$  gilt  $Q \subseteq R$ . Folglich gilt für die Aussageformen „ $x$  ist Quadrat“  $\Rightarrow$  „ $x$  ist Rechteck“.

Da die notwendige Bedingung rechts vom Implikationszeichen steht, ist „ $x$  ist Rechteck“ eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für „ $x$  ist Quadrat“.

- 1.30 Die Bedingungen „ $x$  ist Rhombus“ und „ $x$  ist gleichseitiges Viereck“ sind miteinander zu vergleichen.

*Lösung:* Es ist  $\{x: x \text{ ist Rhombus}\} = \{x: x \text{ ist gleichseitiges Viereck}\}$ , folglich „ $x$  ist Rhombus“  $\Leftrightarrow$  „ $x$  ist gleichseitiges Viereck“, d. h., „ein Viereck ist ein Rhombus genau dann, wenn es gleichseitig ist“. Jede der beiden Bedingungen ist notwendig und hinreichend für die andere.

Das Beispiel zeigt, wie mithilfe einer Äquivalenz ein Begriff (der Begriff „Rhombus“) definiert werden kann. ■

**Kontrollfragen**

- 1.5 Wie ist die Teilmengenrelation definiert?
- 1.6 Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Menge eine echte Teilmenge einer anderen ist?
- 1.7 Mithilfe welcher Wörter ist eine Implikation  $p \Rightarrow q$  zu formulieren? Wie ist sie nach Vertauschen von  $p$  und  $q$  zu lesen? Welche Art von Bedingung sind  $p$  bzw.  $q$ ?
- 1.8 Mithilfe welcher Wörter ist eine Äquivalenz zu formulieren? Welche Art von Bedingung sind  $p$  und  $q$ ?

**Aufgaben: 1.3 und 1.4**

**1.1.3 Operationen mit Mengen**

Bei einer Mengenoperation wird aus zwei Mengen eine neue gebildet. Die wichtigsten Operationen sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

**Definition 1.2**

Gegeben seien zwei Mengen  $A$  und  $B$ .

Der **Durchschnitt**  $A \cap B$  (gelesen: „ $A$  geschnitten mit  $B$ “) enthält alle Elemente, die gemeinsame Elemente von  $A$  und  $B$  sind (Bild 1.5).

Die **Vereinigung**  $A \cup B$  (gelesen: „ $A$  vereinigt mit  $B$ “) enthält alle Elemente, die Element von mindestens einer der Mengen  $A$ ,  $B$  sind (Bild 1.6).

Die **Differenz**  $A \setminus B$  (gelesen: „ $A$  ohne  $B$ “) enthält alle Elemente von  $A$ , die nicht Element von  $B$  sind (Bild 1.7).

Entsprechend enthält  $B \setminus A$  alle Elemente von  $B$ , die nicht Element von  $A$  sind (Bild 1.8).

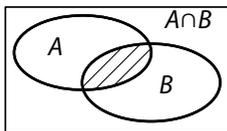


Bild 1.5

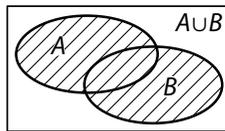


Bild 1.6

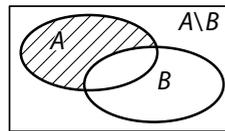


Bild 1.7

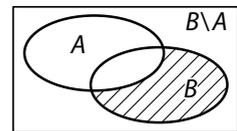


Bild 1.8

**Beispiel**

- 1.31 Mit  $A = \{a; b; c; d\}$  und  $B = \{c; d; e; f\}$  sind Durchschnitt, Vereinigung und Differenzmengen zu bilden.

*Lösung:*

$$A \cap B = \{c; d\} \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$$

$$A \setminus B = \{a; b\} \quad B \setminus A = \{e; f\}$$

■

Allgemein gilt (vgl. *Bilder 1.5 bis 1.8*):

$$A \cap B \subseteq A \cup B \quad (1.2)$$

$$A \setminus B \subseteq A; \quad B \setminus A \subseteq B \quad (1.3)$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \quad B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \quad (1.4)$$

### Beispiele

1.32 Es seien  $A = \{c; d\}$  und  $B = \{a; b; c; d; e\}$ , d. h.,  $A \subseteq B$ .

Dann ist

$$A \cap B = \{c; d\} = A; \quad A \cup B = \{a; b; c; d; e\} = B$$

und nach *Gln. (1.4)*

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \{c; d\} \setminus \{c; d\} = \emptyset$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = \{a; b; c; d; e\} \setminus \{c; d\} = \{a; b; e\}$$

1.33 Es seien  $A = \{2; 4\}$  und  $B = \{10; 12; 14\}$ , d. h.,  $A$  und  $B$  sind disjunkt.

Dann ist

$$A \cap B = \emptyset; \quad A \cup B = \{2; 4; 10; 12; 14\}$$

$$A \setminus B = \{2; 4\} \setminus \emptyset = \{2; 4\} = A$$

$$B \setminus A = \{10; 12; 14\} \setminus \emptyset = \{10; 12; 14\} = B \quad \blacksquare$$

Aus diesen Beispielen folgt durch Verallgemeinerung:

1. Wenn eine Menge  $A$  Teilmenge einer Menge  $B$  ist, so ist der Durchschnitt gleich der Teilmenge, die Vereinigung gleich der Obermenge, und die Differenz  $A \setminus B$  ist leer:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A, \quad A \cup B = B, \quad A \setminus B = \emptyset$$

2. Wenn zwei Mengen  $A, B$  disjunkt sind, so ist der Durchschnitt leer ( $A \cap B = \emptyset$ ). Für die Differenzmengen gilt:

$$A \setminus B = A; \quad B \setminus A = B.$$

Eigenschaften des Durchschnitts und der Vereinigung von Mengen sind:

### Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A \quad (1.5)$$

### Assoziativität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \end{aligned} \quad (1.6)$$

### Distributivität

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Idempotenz**

$$A \cap A = A; \quad A \cup A = A \quad (1.8)$$

Kommutativität und Idempotenz sind offensichtlich, die beiden anderen Eigenschaften lassen sich an Beispielen leicht nachprüfen.

Die Differenz zweier Mengen ist i. Allg. weder kommutativ noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$$

**Beispiel**

- 1.34 Für  $A = \{a; b; c; d\}$ ,  $B = \{b; c; d; e\}$  und  $C = \{c; d; e; f\}$  ist zu zeigen, dass die Differenz nicht assoziativ ist.

*Lösung:* Es ist

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \{b\} = \{a; c; d\}$$

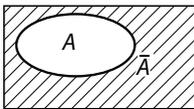
$$(A \setminus B) \setminus C = \{a\} \setminus C = \{a\}$$

$$\{a; c; d\} \neq \{a\}, \quad \text{d. h.,} \quad A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C \quad \blacksquare$$

Als letzte Mengenoperation wird das Bilden des Komplements eingeführt.

**Definition 1.3**

Das **Komplement**  $\bar{A}$  einer Menge  $A$  enthält alle Elemente des Grundbereichs (der Allmenge  $U$ ), die nicht Element von  $A$  sind (*Bild 1.9*).



**Bild 1.9**

$A$  und  $\bar{A}$  sind demnach disjunkte Mengen:  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ .

Ferner gilt:  $A \cup \bar{A} = U$ ;  $U \setminus A = \bar{A}$ ;  $U \setminus \bar{A} = A$ .

Zweifache Komplementbildung hebt sich auf:

$$\overline{\bar{A}} = A \quad (1.9)$$

**Zusammenhang mit logischen Operationen**

Eine Verknüpfung zweier Aussagen (oder Aussageformen)  $p$  und  $q$ , die ausdrückt, dass bei zwei Sachverhalten sowohl der eine als auch der andere gilt, heißt **Konjunktion**  $p \wedge q$ , gelesen: „ $p$  und  $q$ “. Wenn von zwei Sachverhalten mindestens einer gilt, heißt die Verknüpfung **Alternative**  $p \vee q$ , gelesen: „ $p$  oder  $q$ “. Mit Konjunktion und Alternative kann man Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definieren:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

(d. h.,  $x$  ist genau dann ein Element des Durchschnitts, wenn es Element der einen „und (auch)“ der anderen Menge ist);

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

(d. h.,  $x$  ist genau dann ein Element der Vereinigung, wenn es ein Element der einen „oder“ der anderen Menge ist (oder auch ein Element beider Mengen ist)).

Das Bindewort „oder“ schließt bei der Alternative den Fall mit ein, dass beide Sachverhalte gelten. Deshalb wird es auch „einschließendes „oder““ genannt. Das Bindewort „oder“ kann aber auch ausdrücken, dass nur einer der beiden Sachverhalte gilt („ausschließendes „oder““, „entweder – oder“), z. B. in dem Satz „Jede ganze Zahl ist (entweder) gerade oder ungerade“. Eine Verknüpfung mit dem ausschließenden „oder“ ist keine Alternative.

Eine Aussage (oder Aussageform)  $p$ , mit der zu einem gegebenen Sachverhalt der entgegengesetzte ausgedrückt wird, heißt **Negation**  $\neg p$  (gelesen: „nicht  $p$ “). Sie entsteht aus  $p$  durch Vorsetzen von „es ist nicht wahr, dass ...“. Wenn eine Menge  $A$  die Lösungen der Aussageform  $H(x)$  als Elemente hat, so wird das Komplement  $\bar{A}$  aus den Lösungen der Negation von  $H(x)$  gebildet.

Für die Negation von  $p$  ist auch die Schreibweise  $\bar{p}$  üblich.

### Beispiele

1.35 Für  $M = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 2\}$  und  $N = \{x: x \text{ ist teilbar durch } 3\}$  ergibt sich  $M \cap N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \wedge (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$ , d. h.,  $M \cap N$  enthält die durch 2 und durch 3 teilbaren, also die durch 6 teilbaren Zahlen:  $M \cap N = \{0; 6; 12; \dots\}$ .

Die Vereinigung ist  $M \cup N = \{x: (x \text{ ist teilbar durch } 2) \vee (x \text{ ist teilbar durch } 3)\}$ , d. h.,  $M \cup N$  enthält die Zahlen, die durch 2 oder durch 3 (oder durch beide) teilbar sind:  $M \cup N = \{0; 2; 3; 4; 6; 8; \dots\}$ .

1.36 Im Grundbereich  $\{1; 2; \dots; 10\}$  sei

$$A = \{x: x < 7\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Wenn die Aussageform „ $x < 7$ “ negiert wird, ergibt sich „es ist nicht wahr, dass  $x < 7$ “, kürzer „ $x$  ist nicht kleiner als 7“ oder „ $x \geq 7$ “, und das Komplement der Menge  $A$  ist

$$\bar{A} = \{x: x \geq 7\} = \{7; 8; 9; 10\}. \quad \blacksquare$$

### Kontrollfragen

- 1.9 Mithilfe welcher logischer Verknüpfungen werden Durchschnitt und Vereinigung von Mengen definiert?
- 1.10 Es sei  $A$  Teilmenge von  $B$ . Was folgt daraus für Durchschnitt  $A \cap B$ , Vereinigung  $A \cup B$  und Differenz  $A \setminus B$ ?
- 1.11 Es seien  $A$  und  $B$  disjunkte Mengen. Was folgt daraus für Durchschnitt  $A \cap B$  und die Differenzen  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ ?
- 1.12 Welche Relation besteht zwischen Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen?

**Aufgaben: 1.5 bis 1.10**

# Sachwortverzeichnis

$2\pi$ -periodisch 308  
2-Punkte-Form der Geradengleichung 277

## A

Abbildung 263  
abhängige Variable einer Funktion 263  
Abklingkonstante 324  
Ableitung 371  
– der mittelbaren Funktion 383  
– der Potenzfunktion 374  
– einer konstanten Funktion 376  
– eines konstanten Faktors 376  
– eines Produktes 381  
– eines Quotienten 382  
–, geometrische Interpretation 387  
–, höhere 386  
–, Summe 376  
– weiterer Funktionen 384  
–, zweite 386  
Abschreibung 347  
–, geometrisch-degressive 353  
–, lineare 347  
Abschreibungsbetrag 347  
Abschreibungssatz 347  
absoluter Betrag 29  
Abszisse 266  
Achsenabschnitt einer Geraden 275  
achsensymmetrische Funktion 294  
Addition 40  
Addition von Vektoren 565 f.  
Additionsregel 449  
Additionssystem 25  
Additionstheoreme 233  
Additionsverfahren 114  
Ähnlichkeit 154  
Ähnlichkeitssätze 160  
algebraische Form komplexer Zahlen 540  
algebraische Gleichung 88, 90  
algebraische Summe 35  
allgemeine Form der quadratischen Funktion 283  
allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems 113  
allgemeines Dreieck 156  
Allmenge 16

Alternative 21  
Alternativhypothese 510  
Alternativtest 510  
analytische Darstellung einer Funktion 265  
Anfangsbedingung 416  
Anfangsglied 342  
Anfangswert 324  
äquivalente Umformung 89  
Äquivalenz 18  
Arbeitshypothese 510  
Argument einer komplexen Zahl 547  
arithmetische Form komplexer Zahlen 540  
arithmetisches Mittel 482  
Arkusfunktionen 310  
Assoziativgesetz 565, 568, 573, 576  
Assoziativität 20, 33  
Asymptote 304, 363, 393 f.  
Aufzinsen 352  
Aussage 14  
Aussageform 15  
–, Erfüllung 15  
axialsymmetrisch 300

## B

Basis 51, 61  
Baumdiagramm 454  
bedingte Wahrscheinlichkeit 462  
Bedingung, hinreichende 18  
notwendige 18  
Bernoulli-Experiment 502  
Bernoulli-Formel 459  
Bernoulli-Kette 502  
Betrag, absoluter 29  
Betrag einer komplexen Zahl 545, 547  
Betrag eines Vektors 562  
Bijektivität 270  
binärer Logarithmus 64  
Binärsystem 26  
Binomialkoeffizient 69, 459  
Binomialverteilung 502  
–, kumulative 506  
binomische Formel 36  
binomischer Lehrsatz 70  
Bogenmaß 103, 216

Bruch, echter 39  
 –, unechter 39  
 Bruchgleichung 91  
 Bruchrechnung 39

**C**

Cavalierisches Prinzip 195  
 Cramersche Regel 126

**D**

deckungsgleiche Geraden 279  
 Definitionsbereich einer Funktion 263  
 Definitionsbereich einer Ungleichung 111  
 dekadischer Logarithmus 63, 66  
 Determinante 126  
 –, dreireihige 129  
 –, mehrreihige 129  
 –, zweireihige 126  
 Determinantenverfahren 125  
 Dezimalbruch 24  
 Dezimalsystem 26  
 Differenz 19  
 Differenzenquotient 369  
 –, Grenzwert 370  
 Differenzial 369, 377  
 Differenzialquotient 379  
 Differenzierbarkeit 373  
 Dimension eines Koordinatensystems 561  
 direkte Proportionalität 45  
 disjunkte Menge 17  
 Diskontierung 352  
 diskrete Zufallsgröße 516  
 Distributivgesetz 568, 573, 576  
 Distributivität 20, 33  
 Divergenz 107  
 Division 40  
 Doppelbruch 43  
 Drehung 148  
 Dreieck, allgemeines 156  
 –, Flächeninhalt 246  
 –, gleichschenkliges 164  
 –, gleichseitiges 165  
 –, rechtwinkliges 163  
 Dreiecksberechnung 237  
 Dreieckstransversale 161  
 dreireihige Determinante, Lösung 129  
 Durchschnitt 19  
 Durchstoßpunkt 588

**E**

Ebene, Normalenvektor 594  
 –, vektorielle Beschreibung 584  
 echt gebrochenrationale Funktion 302

echte Teilmenge 17  
 echter Bruch 39  
 e-Funktion 305  
 Einheitsvektor 562, 572  
 Einsetzungsverfahren 114  
 Element 13  
 – einer Menge 13  
 empirische Verteilungsfunktion 478  
 Endglied 344  
 entgegengesetzte Zahl 29, 33  
 $\varepsilon$ -Umgebung 355  
 Ereignis 443  
 Erfüllung der Aussageform 15  
 Ergebnis 443  
 Ergebnisraum 443  
 –, Mächtigkeit 443  
 Erwartungswert 499, 503, 517, 519, 522, 526  
 Erweitern 40  
 Eulersche Formel 550  
 Eulersche Gerade 161  
 explizite Form einer Funktionsgleichung 268  
 Exponent 51  
 Exponentialform komplexer Zahlen 550  
 Exponentialfunktionen 303  
 Exponentialgleichung 100  
 Exponentialverteilung 526  
 Extrempunkt 390  
 Extremwertaufgabe 399

**F**

Faktorenzerlegung 36  
 Fakultät 69  
 Fehler 1. Art 510  
 – 2. Art 510  
 Festkommadarstellung 30  
 Flächenelement 424  
 Flächeninhalt 174, 426, 428  
 Flächeninhalt eines Dreiecks 246  
 freie Variable 86  
 Funktion 263, 383  
 –, abhängige Variable 263  
 –, Ableitung 371  
 –, achsensymmetrische 294  
 –, allgemeine Form der quadratischen 283  
 –, analytische Darstellung 265  
 –, äußere 383  
 –, Definitionsbereich 263  
 –, ganzrationale,  $n$ -ten Grades 296  
 –, gebrochenrationale 300  
 –, gerade 293  
 –, grafische Darstellung 265  
 –, innere 383  
 –, konkave 387  
 –, konstante 269

- , konvexe 387
- , lineare 274
- , Lücke 393
- , Maschinenmodell 264
- , mittelbare 320
- , nach oben beschränkte 270
- , nach unten beschränkte 270
- , Nullstelle 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.
- , Polstelle 300
- , Produktform einer quadratischen 287
- , Prozessmodell 264
- , punktsymmetrische 294
- , quadratische 283
- , Scheitelform einer quadratischen 286
- , stetige 362
- , streng monoton fallende 269
- , streng monoton wachsende 269
- , Stützstellen 298
- , trigonometrische 217
- , Umkehrfunktion einer linearen 277
- , unabhängige Variable 263
- , verkettete 320
- , Wertebereich 263
- Funktionsgleichung 265
- , aufstellen mittels der Ableitungen 401

## G

- Galton-Brett 504
- ganze Zahl 24
- ganzrationale Funktionen 296
  - $n$ -ten Grades 296
- Gauß'sche Zahlenebene 544
- Gauß'scher Algorithmus 120
- gebrochenrationale Funktion 300
- gebundene Variable 86
- Gegenereignis 443
- Gegenhypothese 510
- Gegenvektor 564
- Genauwert 351
- geometrisches Mittel 484
- geordnetes  $n$ -Tupel 114
- geordnetes Paar 114
- geordnetes Quadrupel 114
- geordnetes Tripel 114
- Gerade 143
  - , Achsenabschnitt 275
  - , deckungsgleiche 279
  - , Lagebeziehung 279, 581
  - , Parallelität 279
  - , Schnittpunkt 280
  - , senkrechter Schnitt zweier 282
  - , Steigungsfaktor 275

- , Steigungswinkel 276
- , Vektorgleichung 579
- gerade Funktionen 293
  - gestaffelte Form 120
  - gleichschenkliges Dreieck 164
  - gleichseitiges Dreieck 165
  - Gleichsetzungsverfahren 114
- Gleichung 86
  - , algebraische 88, 90
  - , Bruch- 91
  - dritten und höheren Grades 97
  - , Exponential- 100
  - , goniometrische 100, 102
  - , grafische Lösung 105
  - , identische 88
  - , kubische 97
  - , linear abhängige 118
  - , logarithmische 100 f.
  - $n$ -ten Grades 97
  - , quadratische 93
  - , transzendente 88, 99 f.
  - , Wurzel- 91
- Gleichungssystem, lineares 113
- Gleitkommaarstellung 30
- goniometrische Form komplexer Zahlen 549
- goniometrische Gleichung 100, 102
- Gradmaß 215
- grafische Darstellung einer Funktion 265
- grafische Lösung 105
- Grenze, obere 49
  - , untere 49
- Grenzkurve 302, 304
- Grenzwert 361, 369 f.
  - einer Folge 356
  - einer Funktion 359
  - , linksseitiger 360
  - , rechtsseitiger 360
  - , uneigentlicher 356
- Grundbereich 15
- Grundintegrale 415
- Grundkonstruktion 151
- Grundziffer 25

## H

- Häufigkeit, relative 466
- Häufigkeitspolygon 480
- Hauptwert 351, 554
- Hauptwerte der Arkussinusfunktion 311
- Hexadezimalsystem 26
- Histogramm 480
- Hochpunkt 390
- Höhensatz 164
- Hornersches Rechenschema 98
- Hyperbel 300

**I**

Idempotenz 21  
 identische Gleichungen 88  
 Identität 88  
 imaginäre Achse 544  
 imaginäre Zahl 538  
 imaginäre Zahleneinheit 537  
 Imaginärteil 540  
 Implikation 18  
 implizite Form einer Funktionsgleichung 268  
 indirekte Proportionalität 46  
 Injektivität 270  
 Inklusion 16  
 inneres Produkt 572  
 Integral 413  
 – als Grenzwert 422  
 –, bestimmtes 416, 419, 423  
 –, partikuläres 417  
 –, unbestimmtes 414  
 Integralfunktion 414  
 Integralrechnung, Grundaufgabe 413  
 Integrand 414  
 Integration 413  
 – durch Substitution 431  
 –, Flächenberechnung 417  
 –, numerische 436  
 Integrationsgrenzen 419  
 Integrationsintervall 421  
 Integrationskonstante 414  
 Integrationsvariable 414  
 Intervall 28  
 irrationale Zahl 25  
 Iteration 105

**K**

Kardinalzahl 23  
 kartesische Koordinaten 547  
 kartesisches Koordinatensystem 265, 560  
 Kathetensatz 163  
 Kegel 190  
 Kegelstumpf 191  
 Kennziffer 66  
 Keplersche Fassregel 437  
 Kettenregel 383  
 Klasse 477  
 Kombination 452, 458  
 – mit Wiederholung 458  
 – ohne Wiederholung 458  
 Kombinatorik 452  
 Kommutativgesetz 568  
 Kommutativität 20, 33  
 Komplement einer Menge 21

komplexe Zahl 540  
 –, algebraische Form 540  
 –, Argument einer 547  
 –, arithmetische Form 540  
 –, Betrag einer 545, 547  
 –, Exponentialform 550  
 –, goniometrische Form 549  
 –, konjugiert 540  
 –, Norm einer 542  
 trigonometrische Form 549  
 –, vektorielle Darstellung 544  
 Kongruenz 149  
 Kongruenzsätze 158  
 konjugiert komplexe Zahl 540  
 Konjunktion 21  
 konstante Funktion 269  
 Konvergenz 107  
 Konvertieren 27  
 Konvertierung 26  
 Koordinaten eins Punktes 561  
 Koordinatenform des Skalarprodukts 573  
 koordinatenfreie Form des Skalarprodukts 574  
 Koordinatensystem, Dimension 561  
 –, kartesisches 560  
 Koordinatenursprung 266, 561  
 Korrelation 489  
 Korrelationskoeffizient 490  
 Kosinus 217  
 Kosinusfunktion 308  
 –, Maximum und Minimum 309  
 Kosinussatz 242  
 Kotangens 217  
 Kreis 170  
 Kreisdiagramm 266  
 Kreuzprodukt 576  
 kubische Gleichung 97  
 Kugel 195  
 kumulative Binomialverteilung 506  
 Kurvendiskussion 392  
 –, Asymptoten 394  
 –, Definitionsbereich 393  
 –, Extrempunkte und Art der Extremwerte 394  
 –, Nullstellen 393  
 –, Schnittpunkt mit der  $y$ -Achse 393  
 –, Skizze der Funktion 394  
 –, Symmetrie 393  
 –, Unstetigkeitsstellen 393  
 –, Verhalten im Unendlichen 394  
 –, Wendepunkte 394  
 –, Wertebereich 394  
 Kürzen 40

**L**

Lagebeziehung zwischen Ebenen 590  
 – zwischen einer Ebene und einer Geraden 588  
 – zwischen Geraden 279, 581  
 Laplace-Experiment 447  
 leere Menge 14  
 linear abhängige Gleichung 118  
 lineare Funktion 274  
 lineares Gleichungssystem 113  
 –, allgemeine Form 113  
 Linearfaktoren 298  
 Logarithmensystem 63  
 logarithmische Gleichung 100 f.  
 Logarithmus 51, 61  
 –, Basis 61  
 –, binärer 64  
 –, dekadischer 63, 66  
 –, natürlicher 63  
 –, Numerus 61  
 Logarithmusfunktionen 306  
 Lösung der Aussageform 15  
 Lücke 393

**M**

Mächtigkeit des Ergebnisraumes 443  
 Mantisse 66  
 Maschinenmodell von Funktionen 264  
 Maximum 389  
 –, absolutes 390  
 –, relatives 389  
 Median 483  
 mehrreihige Determinante 129  
 mehrstufiger Zufallsversuch 453  
 Menge 13  
 –, Differenz 19  
 –, disjunkte 17  
 –, Durchschnitt 19  
 –, Komplement 21  
 –, leere 14  
 –, Vereinigung 19  
 Mengenoperation 19  
 Merkmal, qualitatives 475  
 –, quantitatives 475  
 Minimum 389  
 –, absolutes 390  
 –, relatives 389  
 Mittel, arithmetisches 482  
 –, geometrisches 484  
 mittelbare Funktion 320  
 Mittelwert 481  
 mittlere Proportionale 44  
 Modalwert 484  
 Monotonie von Funktionen 269

Monotoniebogen 387  
 Multiplikation 40  
 Multiplikation eines Vektors 568  
 Multiplikationsregel 450  
 Multiplikationssatz 463

**N**

nach oben beschränkte Funktion 270  
 nach unten beschränkte Funktion 270  
 Näherungsverfahren 104  
 natürliche Zahl 23  
 natürlicher Logarithmus 63  
 Nebenbedingungen 399  
 Nebenwinkel 146  
 $n$ -Eck 168  
 Negation 22  
 Nenner, Rationalmachen 58  
 Neugrad 216  
 Norm einer komplexen Zahl 542  
 Normaleneinheitsvektor 596  
 Normalenform der Ebenengleichung 594  
 Normalenvektor einer Ebene 594  
 Normalform der Geradengleichung 275  
 Normalform einer quadratischen Funktion 283  
 Normalparabel 285  
 Normalverteilung 519  
 –, standardisierte 522  
 Normzahlen 351  
 Nullfolge 357  
 Nullhypothese 510  
 Nullpunkt 266  
 Nullstelle 393  
 – einer Funktion 270, 277 ff., 286 ff., 290 f., 298, 308 f.  
 – einer Parabel 287  
 Nullvektor 564  
 Numerus 51, 61

**O**

obere Grenze 49  
 obere Schranke 270  
 Obermenge 17  
 Obersumme 423  
 Ordinalzahl 23  
 Ordinate 266  
 Orientierung eines Vektors 561  
 Orthogonalitätsbedingung 574  
 Ortsvektor eines Punktes 562

**P**

Paar, geordnetes 114

Parabel 283  
 –  $n$ -ter Ordnung 293  
 –, Nullstelle 287  
 Parallelität zweier Geraden 279  
 Parameter 117  
 Partialdivision 38  
 Pascalsches Dreieck 68  
 $\pi$ -periodisch 309  
 periodische Funktionen 307  
 Permutation 452, 457  
 – mit Wiederholung 457  
 – ohne Wiederholung 457  
 Pfadregel 455  
 Pivotelement 121  
 Planimetrie 143  
 Poisson-Verteilung 516  
 Polarkoordinaten 228, 547  
 Polstelle einer Funktion 300  
 Polynom 89  
 Polynomfunktion  $n$ -ten Grades 296  
 Positionssystem 26  
 Potenzfunktionen 293  
 Potenzgesetz 51  
 primäre Verteilungstafel 477, 482  
 Prinzip der Mengenbildung 16  
 Prisma 183  
 Prismatoid 188  
 Probe 90  
 Produktform einer quadratischen Funktion 287  
 Produktgleichung 44  
 Produktregel 381, 455  
 Promille 47  
 Proportion 44  
 Proportionalität, direkte 45  
 –, indirekte 46  
 Prozentrechnung 47  
 Prozessmodell von Funktionen 264  
 Punkt 143  
 punktsymmetrische Funktion 294  
 Pyramide 185  
 Pyramidenstumpf 189

**Q**

Quader 181  
 Quadranten 266  
 Quadrantenrelationen 225  
 quadratische Ergänzung 289  
 quadratische Funktionen 283  
 quadratische Gleichung 93  
 Quadrupel, geordnetes 114  
 qualitatives Merkmal 475  
 quantitatives Merkmal 475  
 Quotientenregel 382

**R**

Radikand 51, 54  
 rationale Zahl 24  
 Rationalmachen des Nenners 58  
 Rauminhalt von Rotationskörpern 433  
 Realteil 540  
 Rechenoperation 32  
 – dritter Stufe 51  
 – erster Stufe 32  
 – zweiter Stufe 32  
 Rechenschema von Horner 98  
 Rechteckkoordinaten 547  
 Rechte-Hand-Regel 561  
 rechtwinkliges Dreieck 163  
 rechtwinkliges Koordinatensystem 265  
 reelle Achse 544  
 reelle Zahl 23, 25  
 Regel zum Konvertieren 27  
 Regel von Sarrus 130  
 Regressionsgerade 492  
 Regressionskoeffizient 492  
 regula falsi 108  
 Reihe 344  
 Relation 263  
 relative Häufigkeit 466  
 Repräsentant eines Vektors 564  
 reziproke Zahl 33  
 Richtung eines Vektors 561  
 Richtungssinn 561  
 Richtungsvektor 579  
 Runden von Zahlen 31

**S**

Satz des Pythagoras 164  
 Satz von Bayes 465  
 Säulendiagramm 266  
 Scheitelform einer quadratischen Funktion 286  
 Scheitelwinkel 146  
 Schnittpunkt zweier Geraden 280  
 Schreibweise von Zahlen 30  
 Sekantenverfahren 108  
 sekundäre Verteilungstafel 477, 482  
 senkrechter Schnitt zweier Geraden 282  
 signifikante Ziffer 30  
 Signifikanztest 512  
 Signum 29  
 Simpsonsche Regel 438  
 Simulation 466  
 Sinus 216  
 Sinusfunktion 308  
 –, Maximum und Minimum 308  
 Sinussatz 239  
 Skalar 562

Skalarprodukt 572  
 –, Koordinatenform 573  
 –, koordinatenfreie Form 574  
 Spannvektoren 585  
 Spannweite 476  
 Spatprodukt 577  
 Spiegelachse 272  
 Spiegelung 148  
 Sprungstelle 361  
 Stammfunktion 414  
 Standardabweichung 486, 499, 503  
 standardisierte Normalverteilung 522  
 Steigungsdreieck 276  
 Steigungsfaktor einer Geraden 275  
 Steigungswinkel einer Geraden 276  
 Stereometrie 180  
 Stichprobe 476  
 Strahl 144  
 Strecke 144  
 Streckung, zentrische 154  
 streng monoton fallende Funktion 269  
 streng monoton wachsende Funktion 269  
 Streuung 485, 499, 517, 519, 526  
 Streuungsmaß 481  
 Stufenpunkt 391  
 Stufensprung 351  
 Stufenwinkel 146  
 Stützstellen einer Funktion 298  
 Stützvektor 579  
 Stützwerte einer Funktion 298  
 Substitutionsregel 431  
 Subtraktion von Vektoren 565 ff.  
 Summationsgrenze 49  
 Summationsindex 49  
 Summe, algebraische 35  
 Summenregel 455  
 Summenzeichen 49  
 Surjektivität 270  
 Symmetrie 150

## T

Tangens 217  
 Tangensfunktion 309  
 Teilmenge 16  
 –, echte 17  
 Term 35  
 Terrassenpunkt 391  
 Tiefpunkt 390  
 totale Wahrscheinlichkeit 463  
 transzendente Gleichung 88, 99 f.  
 Trend 493  
 trigonometrische Form komplexer Zahlen 549  
 trigonometrische Funktion 217, 307  
 trigonometrischer Pythagoras 231

Tripel, geordnetes 114  
 Tupel,  $n$ -, geordnetes 114

## U

Umkehrfunktion 272  
 – einer linearen Funktion 277  
 unabhängige Variable einer Funktion 263  
 unecht gebrochenrationale Funktion 302  
 unechter Bruch 39  
 Unendlichkeitsstelle 393  
 ungerade Funktionen 293  
 Ungleichung 110  
 –, Definitionsbereich 111  
 Unstetigkeit, hebbare 362  
 Unstetigkeitsstelle 393  
 untere Grenze 49  
 untere Schranke 270  
 Untermenge 17  
 Untersumme 423  
 Urliste 476  
 Urnenmodell 454  
 Ursprungsgerade 275

## V

Variable 15, 86  
 –, freie 86  
 –, gebundene 86  
 Varianz 499, 503  
 Variation 452, 458  
 – mit Wiederholung 458  
 – ohne Wiederholung 458  
 Variationskoeffizient 486  
 Vektor 561  
 –, Addition 565 f.  
 –, Betrag 562  
 –, Multiplikation 568  
 –, Orientierung 561  
 –, Repräsentant 564  
 –, Richtung 561  
 –, Subtraktion 565 ff.  
 –, Vielfaches 568  
 –, Winkel 570  
 Vektoraddition 546  
 Vektorgleichung einer Geraden 579  
 vektorielle Beschreibung von Ebenen 584  
 vektorielle Darstellung komplexer Zahlen 544  
 Vektorparallelogramm 565  
 Vektorprodukt 576  
 Vereinigung 19  
 verkettete Funktion 320  
 Verschiebung 148  
 Versor 550  
 Verteilungsfunktion 496, 526  
 –, empirische 478

Verteilungstafel 476

–, primäre 477, 482

–, sekundäre 477, 482

Vielfaches eines Vektors 568

Viereck 166

Vierfeldertafel 461

Vorzeichenregel 34

## W

Wachstumskonstante 324

Wachstumstempo 350

Wahrheitswert 14

Wahrscheinlichkeit, bedingte 462

–, totale 463

Wahrscheinlichkeitsdichte 500, 519, 526

Wahrscheinlichkeitsverteilung 496

Wechselwinkel 146

Wendepunkt 391

Wertebereich einer Funktion  $W$  263

Wertetabelle 265

Winkel 144

Winkel zwischen Vektoren 570

Wurzel 54

Wurzelexponent 51, 54

Wurzelfunktionen 295

Wurzelgleichung 91

Wurzelsatz von Vieta 96

## Z

Zahl, entgegengesetzte 29, 33

–, ganze 24

–, irrationale 25

–, natürliche 23

–, rationale 24

–, reelle 23, 25

–, reziproke 33

–, Runden 31

–, Schreibweise 30

Zahlenfolge 341

–, alternierende 343

–, arithmetische 344

–, divergente 356

–, endliche 342 f.

–, fallende 343, 348

–, geometrische 348

–, Glied einer 342

–, grafische Darstellung 342

–, Grenzwert einer 355

–, konstante 343

–, konvergente 356

–, rekursive Darstellung 343 f., 348

–, streng monoton fallend 343 f., 348

–, streng monoton wachsend 343 f., 348

–, tabellarische Darstellung 342

–, unabhängige Darstellung 342, 344, 348

–, unendliche 342 f.

–, wachsende 343

–, Wortdarstellung 342

Zahlensystem 25

zentralsymmetrisch 300

zentrische Streckung 154

Zielfunktion 399

Ziffer 25

–, signifikante 30

Zinseszinsrechnung 352

Zinsrechnung 47

Zufallsexperiment 443

Zufallsgröße 495, 503

–, diskrete 516

Zufallsversuch 443, 453

zweireihige Determinante 126

Zweiwertigkeit 14

zyklometrische Funktionen 310

Zylinder 190