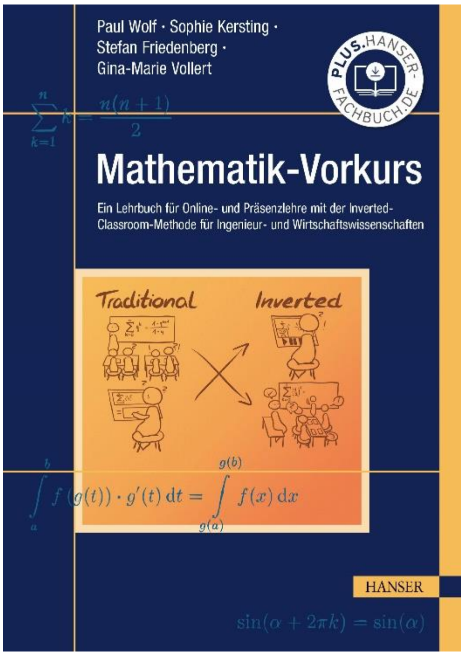
HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik-Vorkurs

von Paul Wolf, Sophie J. Kersting, Stefan Friedenberg
und Gina-Marie Vollert

Print-ISBN: 978-3-446-48152-7
E-Book-ISBN: 978-3-446-48173-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446481527
sowie im Buchhandel

Vorwort

Mathematik-Vorkurse gehören bereits seit vielen Jahren an den meisten Hochschulen fest zur Studieneingangsphase und sollen den Übergang von der Schule (oder Ausbildung) an die Hochschule erleichtern. Sie stellen üblicherweise ein zusätzliches, freiwilliges Angebot dar und richten sich an die angehenden Studierenden, die in ihrem Studienfach Mathematikveranstaltungen besuchen werden (z. B. Ingenieurstudiengänge oder Betriebswirtschaftslehre). Vorkurse dienen zugleich als Auffrischungskurs für Schulstoff, welcher eventuell schon in Vergessenheit geraten ist sowie auch als Brückenkurs zur Hochschulmathematik. Natürlich ist der soziale Aspekt, also das erste Kennenlernen von anderen Studierenden und der Hochschule in einem lockeren Rahmen, nicht zu unterschätzen und wird von Studierenden in höheren Semestern rückwirkend häufig besonders hervorgehoben.

Die hier vorliegenden Materialien richten sich einerseits an Lehrende, die einen Mathematik-Vorkurs planen, umsetzen und ggf. auch Aspekte der Inverted-Classroom-Methode einfließen lassen wollen. Andererseits können auch angehende Studierende diese Materialien und Aufgaben zum Selbststudium bzw. zur Vorbereitung nutzen.

Allgemeine Hinweise

Jedes Kapitel steht für einen Vorkurs-Tag, wobei die Inhalte für etwa 90 bis 120 Minuten Vorlesung bzw. Selbstlernzeit gedacht sind. Die Auswahl der Themen basiert auf einer umfangreichen Befragung[1] von Hochschullehrenden, die Mathematik oder ein mathematiknahes Fach (wie Technische Mechanik) in ingenieur- und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen lehren. Die Inhalte werden an der Hochschule Stralsund für einen achttägigen Vorkurs genutzt und konzentrieren sich weitestgehend auf einen gemeinsamen Nenner an relevanten Themen. Ein Vorkurs-Tag besteht aus einer etwa zweistündigen Phase am Vormittag zur Einführung der Inhalte (per Vorlesung oder zum Selbstlernen per Videos bzw. Skript) und etwa vierstündigen Tutorien am Nachmittag. Diese Tutorien werden an der Hochschule Stralsund von Studierenden höheren Semesters gehalten, welche

[1] Siehe Wolf, P. & Friedenberg, S. (2017). Gegenüberstellung von Bildungsstandards und Bedarfsanalyse bzgl. der Mathematikgrundlagen an der HS Stralsund. ZFHE, Jg. 12, Nr. 4, S. 189–214 sowie Wolf, P. & Friedenberg, S. (2019). Hochschulweite Untersuchung der Mathematik-Grundlagen zu Studienbeginn an der Hochschule Stralsund. In 15. Proceedings der Wismarer Frege Reihe, S. 29–35

zuvor bzw. zum Vorkurs begleitend eine Tutorenschulung besucht haben.

Die Erklärungen der mathematischen Inhalte der folgenden Kapitel werden an passenden Stellen durch kleine Aufgaben (Verständnisfragen) unterbrochen. Diese sollten bearbeitet werden, bevor man weiter voranschreitet. Am Ende eines Kapitels finden sich die Lösungen zu den Verständnisfragen.

Zu jedem Kapitel (bzw. Vorkurs-Tag) werden Präsenzaufgaben angeboten, welche in den Tutorien bearbeitet und besprochen werden sollen. Sie sind für etwa vierstündige Tutorien gedacht. Soll der Vorkurs pro Tag etwas weniger intensiv sein, so könnte man ihn auch auf zwei bis drei Wochen strecken. Es handelt sich bei den aufgelisteten Präsenzaufgaben um einen Aufgaben-Pool, d. h. es können üblicherweise nicht alle Aufgaben in dieser Zeit bearbeitet werden, sondern in den Tutorien kann und sollte man nach Bedarf Schwerpunkte setzen. Die Zusatzaufgaben richten sich an Studierende, die schneller fertig sind und einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad wünschen. Die Lösungen zu den Präsenzaufgaben sind, wie alle weiteren zusätzlichen Materialien (Formelsammlung, GeoGebra-Dateien, LaTeX-Dateien), im Online-Bereich[2] zu diesem Buch einsehbar.

Wir nutzen die im englischsprachigen Raum sowie in der Programmierung üblichen Dezimaltrennzeichen, d. h. 1,25 wird als 1.25 notiert. Auf Tausendertrennzeichen können wir in diesem Buch verzichten, sodass keine Verwechslungsgefahr besteht.

Die Materialien wurden nach bestem Wissen und Gewissen erstellt, können aber natürlich dennoch kleinere Fehler enthalten. Hinweise werden gerne per E-Mail entgegengenommen.

Informationen für Studierende

Um Ihren Einstieg in das Studium zu erleichtern, sollten Sie nach Möglichkeit an dem Mathematik-Vorkurs Ihrer Hochschule aufmerksam und aktiv teilnehmen. Wenn Sie die behandelten Themen bereits gut beherrschen, dann genießen Sie die Wiederholung und unterstützen die Leute im Kurs um sich herum und knüpfen Sie dabei neue Kontakte. Sollten Sie Schwierigkeiten mit den behandelten Inhalten haben, so ist der Vorkurs der richtige Ort, um an den Problemstellen zu arbeiten. Denn während des Semesters werden Sie erfahrungsgemäß kaum noch Zeit dafür finden, grundlegende Themen wie Bruchrechnung oder Logarithmusgesetze zu üben.

Die hier vorliegenden Materialien sind so konzipiert, dass Sie sich möglichst Abschnitt für Abschnitt mit den Inhalten beschäftigen und die entsprechenden Verständnisaufgaben genau dann lösen, wenn Sie auf diese treffen. Die Lösungen zu den Verständnisaufgaben finden Sie am Ende des entsprechenden Kapitels, wie auch Formelübersichten. Die

[2] *https://plus.hanser-fachbuch.de/*

Präsenzaufgaben sind für die Tutorien gedacht und von zentraler Bedeutung, um Ihre mathematischen Fähigkeiten zu trainieren und zu festigen. Die Lösungen sind, wie alle weiteren zusätzlichen Materialien (Formelsammlung, GeoGebra-Dateien), im Online-Bereich[3] zu diesem Buch einsehbar.

Das Lehren und Lernen an der Hochschule unterscheidet sich mitunter deutlich vom Unterricht an der Schule. Es wird erwartet, dass Ihre Präsenzzeit etwa gleich der Zeit des Selbststudiums ist, d. h. Sie sollen sich pro Vorlesung mindestens erneut 90 Minuten Zeit nehmen, um die Inhalte nachzuvollziehen. Weitere Zeit wird zur Bearbeitung von Übungsaufgaben benötigt, die zentraler Bestandteil der Ausbildung sind. Es ist wichtig, dass Sie gerade in der Mathematik am Ball bleiben und nicht erst kurz vor der Klausur versuchen, alles in kurzer Zeit zu lernen, denn das funktioniert selten – und selbst wenn doch, so werden Sie die Inhalte schnell wieder vergessen, was sich schon im darauffolgenden Semester zum Nachteil für Sie entwickeln wird. In den Fachveranstaltungen (wie z. B. Technische Mechanik, Grundlagen der Elektrotechnik usw.) wird und muss man davon ausgehen, dass Sie die Themen, die in der Mathematik-Veranstaltung behandelt wurden, beherrschen.

Es gibt umfangreiche Bücher mit vielen Tipps zum Lernen an der Hochschule, wir wollen hier nur ein paar fundamentale Punkte aufzählen.

- Besuchen Sie nach Möglichkeit jede Vorlesung, jedes Tutorium und (falls angeboten) jede Zusatzübung oder Ergänzung
- Bereiten Sie die Vorlesungen nach: Inhalte nochmal durchgehen, Unklares bzw. Fragen notieren und die Lehrenden fragen. Versuchen Sie stets, selbst Beispiele für Definitionen, Sätze etc. zu finden und durchzurechnen. Lassen Sie niemals locker, bis Sie wirklich alles verstanden haben (d. h. nicht nur auswendig, sondern auch anwenden können).
- Machen Sie sich handschriftlich Listen zu wichtigen Eigenschaften, Definitionen, Sätzen usw.
- Bearbeiten Sie jede Übungsaufgabe sorgfältig. Geben Sie nicht auf, sondern fragen Sie ggf. andere Studierende und Lehrende um Rat (nicht nach der Lösung!). Ihre Vorlesungsmitschriften sollten beim Bearbeiten der Übungszettel in Griffweite liegen und Sie sollten das Thema, zu dem die Aufgabe gehört, bereits nachgearbeitet haben.
- Manche Menschen lernen besser in Lerngruppen, andere besser alleine. Aber bedenken Sie: In Klausuren zahlt nur das, was Sie selbst und eigenständig können. Bestehen Sie auf eine Einzelarbeitszeit, bevor man Ergebnisse vergleicht und sich bei Bedarf gegenseitig hilft.
- Besonders wichtig: Seien Sie ehrgeizig und geben Sie nicht auf, denn Sie machen das für sich und Ihre Zukunft. Sie können das schaffen, wie so viele andere vor Ihnen auch!

Viel Erfolg im Studium!

Paul Wolf, Sophie Kersting, Stefan Friedenberg & Gina-Marie Vollert Im März 2024

[3] *https://plus.hanser-fachbuch.de/*

Inhalt

1 Zahlbereiche, Symbole, Mengen

Zunächst starten wir damit, die absoluten Grundlagen zu wiederholen. Mathematik kann als universelle Sprache vieler Wissenschaften gesehen werden, weshalb es nicht verwundert, dass man zunächst die Symbole lesen können muss, bevor man ganze Sätze verstehen kann. Schauen wir uns nun also einige grundlegende Symbole und ihre Bedeutung an. Wir können im Rahmen dieses Vorkurses nicht jeden Begriff mathematisch sauber einführen und werden daher teils mit intuitiven Vorstellungen arbeiten müssen (z. B. Mengenbegriff). Das soll uns hier jedoch nicht weiter stören. Die exakten Definitionen werden Sie an passender Stelle im Studium kennenlernen.

1.1 Zahlbereiche

Die folgenden Grundlagen sind Ihnen vermutlich aus der Schule bekannt. Wir gehen auf diese daher nur recht kurz ein.

1.1.1 Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$

Die **natürlichen Zahlen** sind definiert durch $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei häufig auch

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

verwendet wird. Der Zahlenstrahl ist eine sinnvolle graphische Darstellung (vgl. Bild 1.1).

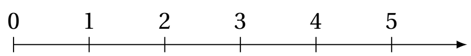


Bild 1.1 Zahlenstrahl zu $\mathbb{N}_0$

Die Addition erfolgt noch ohne Probleme, doch was soll beispielsweise $3 - 5$ sein (z. B. Schulden)? Durch Erweiterung der natürlichen Zahl um die negativen Zahlen erhält man die Menge der **ganzen Zahlen** (vgl. Bild 1.2):

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

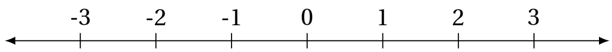


Bild 1.2 Zahlengerade zu $\mathbb{Z}$

Nun ist es zwar möglich, ohne Probleme zu subtrahieren, doch bei der Division z. B. 3 : 5 (Anteile) stoßen die ganzen Zahlen an ihre Grenzen. Daher ergänzen wir sie durch die Brüche, was uns zu den **rationalen Zahlen** führt. Diese sind definiert durch:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Man bemerke, dass auch die ganzen Zahlen in $\mathbb{Q}$ enthalten sind, denn z. B. $-5 = \frac{-5}{1}$.

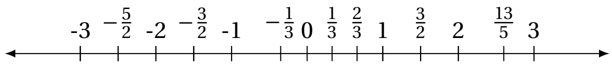


Bild 1.3 Zahlengerade zu $\mathbb{Q}$

Es gibt jedoch Zahlen, die nicht als Brüche dargestellt werden können, die **irrationalen Zahlen** $\mathbb{I}$. Bekannte Vertreter sind z. B. $\sqrt{2} \approx 1.41421\ldots$, $\pi \approx 3.14159\ldots$ oder die Euler-Zahl $e \approx 2.71828\ldots$. Sie füllen die „Lücken“ zwischen den Brüchen, sodass zusammen eine kontinuierliche Zahlengerade entsteht. Wenn man nun $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{I}$ vereinigt, so erhält man die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$, also „alle Zahlen“. Der Zusammenhang zwischen den genannten Zahlenräumen wird in Bild 1.4 verdeutlicht.

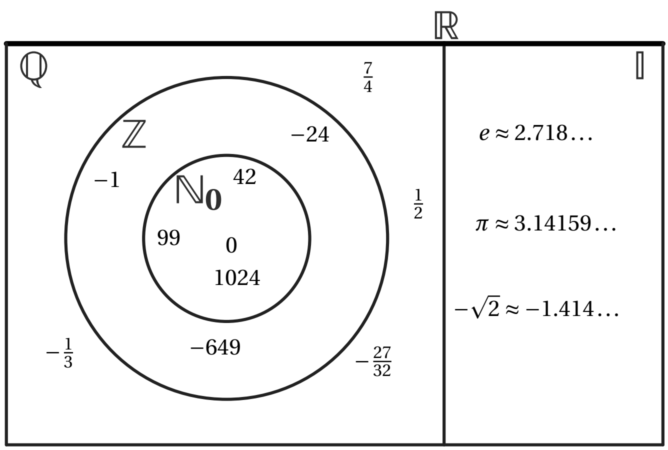


Bild 1.4 Visualisierung der Zahlbereiche $\mathbb{N}_0$ bis $\mathbb{R}$

Was ist aber beispielsweise mit $\sqrt{-1}$? Das würde uns zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ führen, die jedoch nicht Thema des Vorkurses sind.

Verständnisfrage 1

a) Ordnen Sie die Zahlbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ passend zu.
- Arbeitslosenquote
- Sterne zählen
- Zeit
- Kreisumfang von Kreis mit Radius $r = 1$
- Gewinn/Verlust im Casino

b) $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl. der Multiplikation, d. h. das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen ist stets wieder eine natürliche Zahl. Dies gilt ebenfalls für $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$. Finden Sie ein Beispiel, warum dagegen die irrationalen Zahlen nicht abgeschlossen bzgl. der Multiplikation sind.

1.1.2 Bruchrechnung

Wir wollen an dieser Stelle an die wichtigsten Bruchrechenregeln erinnern, die aus der Schule bekannt sein sollten. Ein Bruch hat den Aufbau $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$, wobei der Nenner nicht Null sein darf.

- **Multiplikation:** Hier ist es nicht nötig, die Brüche auf einen Nenner zu bringen.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{z. B.} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

- **Kehrwert:** $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$, wobei man auch $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ statt $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)}$ schreibt.
- **Doppelbruch:** Der obere Bruch wird mit dem Kehrwert des unteren multipliziert, denn:

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{da} \qquad \text{z. B.} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

- **Erweitern:** Um die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, **erweitert** man sie. Erweitern ist nichts anderes, als mit einer 1 zu multiplizieren, die man passend darstellt:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

  Also wird der Bruch nur in seiner Darstellung so geändert, dass er mit anderen vergleichbar wird. So könnten wir nun $\frac{3}{4}$ sofort mit beispielsweise $\frac{5}{8}$ vergleichen, da gilt:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} > \frac{5}{8}$$

- **Kürzen:** Der gegenteilige Vorgang, also das Entfernen der Eins wird kürzen genannt. Hier ausführlich:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

  Oder kurz:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Der Vorteil der langen Variante besteht allerdings darin, dass man nicht fälschlicherweise aus Summen kürzt. So wäre das Kürzen von c in folgendem Bruch nicht zulässig:

$$\frac{a+c}{c} \overset{!!!}{\neq} \frac{a+1}{1} = a+1$$

Geht man ausführlich vor, so macht man es richtig:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{\left(\frac{a}{c}+1\right)\cdot c}{1\cdot c} = \frac{\left(\frac{a}{c}+1\right)}{1}\cdot\frac{c}{c} = \frac{a}{c}+1$$

Sind Sie in der Bruchrechnung noch unsicher, so empfiehlt sich die ausführliche Variante, bis Sie darauf verzichten können.

- **Addition:** Sind die Brüche gleichnamig (gleicher Nenner), so kann man die Zähler direkt addieren:

  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

  Sind die Nenner jedoch unterschiedlich, so müssen wir die Brüche passend erweitern und dadurch auf einen gemeinsamen Nenner bringen:

  $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{db}$$

Da leider viele Leute die Bruchrechnung als unangenehm in Erinnerung haben und daher lieber auf (die eigentlich schwierigeren) Dezimalzahlen zurückgreifen, betrachten wir hier noch ein Beispiel, weshalb man zum Rechnen stets Brüche bevorzugen sollte. Während $\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$ auch im Kopf sehr einfach ist, stellt uns dieselbe Rechnung in Dezimalzahlen vor eine Herausforderung: $0.375\cdot 1.\bar{3} = 0.5$.
Wenn man ein Ergebnis berechnet hat, so können Dezimalzahlen für die Anschauung durchaus nützlich sein. Ein weiteres wichtiges Argument für die Bruchrechnung ist, dass sie im Umgang mit vielen Formeln benötigt wird (siehe z. B. Elektrotechnik $R=\frac{I}{U}$ oder BWL Umsatzrentabilität $= \frac{\text{Gewinn}}{\text{Umsatz}}$ oder Prozentrechnung u. v. m.). Und letztlich sollte man sich bewusst sein, dass ein Bruch wie $\frac{1}{3}$ natürlich exakter ist, als eine gerundete Form wie 0.33. Solche vermeintlich kleinen Rundungsfehler können bei komplexeren Verfahren zu erheblichen Fehlern im Endergebnis führen.

Verständnisfrage 2

a) Welche Umformungen sind im Folgenden Beispiel richtig bzw. falsch?

$$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=\frac{2\cdot 4}{2\cdot 6}=\frac{2}{2}+\frac{4}{6}=1+\frac{2}{3}$$

b) Ein Beispiel aus der Elektrotechnik: Sind zwei elektrische Widerstände R_1, R_2 parallel geschaltet und sucht man den gemeinsamen Widerstand, so kann man folgende Formel nutzen:

$$\frac{1}{R_{\text{gesamt}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

Addieren Sie die Brüche auf der rechten Seite und bilden Sie anschließend den Kehrwert, um eine direkte Formel für den Gesamtwiderstand zu erhalten.

1.1.3 Distributivgesetz in $\mathbb{R}$

Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz[1] bereiten meist keine Probleme, das Distributivgesetz jedoch häufig schon. Es seien nun $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, also reelle Zahlen. Das Distributivgesetz lautet:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Liest man die Zeile von links nach rechts, so nennt man dies auch **Ausmultiplizieren** oder „Klammern auflösen". Von rechts nach links spricht man vom **Ausklammern** (hier wird a ausgeklammert). Man kann das Distributivgesetz auch mehrfach anwenden, wodurch sich folgende Regel für zwei Klammern ergibt:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Da in diesem Zusammenhang die **Vorzeichenregeln** der Multiplikation häufig vergessen werden, fassen wir sie in Tabelle 1.1 zusammen. In Worten: Positiv mal Positiv gibt Positiv. Positiv mal Negativ gibt Negativ. Und Negativ mal Negativ gibt Positiv. So ist beispielsweise $(-3) \cdot (-5) = 15$.

·	+	−
+	+	−
−	−	+

Tabelle 1.1 Vorzeichentabelle zur Multiplikation in $\mathbb{R}$

Beispiel:

$$\begin{aligned} -3(x-y) + 2(-x+y) &= -3(x-y) - 2(x-y) \\ &= (x-y)(-3-2) \\ &= -5(x-y) \\ &= -5x + 5y \end{aligned}$$

Wir haben hier $(x-y)$ als Ganzes ausgeklammert. Man beachte die Verwendung der Vorzeichenregeln in diesem Beispiel. ▲

Verständnisfrage 3

a) Klammern Sie $(x+2y)$ in folgendem Ausdruck aus: $5(x+2y) - 8z(-x-2y)$.
b) Warum sollte man die Zahl Null grundsätzlich niemals ausklammern?

[1] Assoziativgesetz: $a+(b+c) = (a+b)+c$, Kommutativgesetz: $a+b = b+a$ (bzw. jeweils auch mit Multiplikation)

1.2 Mathematische und aussagenlogische Symbole

Wer die Zeichen nicht lesen kann, wird den Text nie verstehen, daher wollen wir nun auf einige grundlegende mathematische (bzw. aussagenlogische) Symbole eingehen. Zum Lernen ist es stets sinnvoll, sich eigene Beispiel zu überlegen und immer, wenn man beim Lesen auf diese Symbole stößt, sie (falls möglich) laut vorzulesen (siehe dazu die „lies“-Anmerkungen).
Wir werden im Folgenden logische Aussagen durch Symbole darstellen. Eine logische Aussage ist dadurch definiert, dass man ihr einen Wahrheitswert (wahr oder falsch) zuweisen kann. So kann der Satz „Anna ist 165 cm groß.“ wahr oder falsch sein und ist damit eine Aussage. Dagegen sind „Alles Gute zum Geburtstag!“ oder auch „Wie geht es dir?“ keine Aussagen. Kommen wir nun zu für uns wichtigen Aussagen:

- $x \in M$ lies: „x **ist Element** der Menge M“ (analog $x \notin M$ für „ist kein Element… “)

Beispiel:
$5 \in \mathbb{N}$, lies: 5 ist ein Element der natürlichen Zahlen.
$-3 \notin \mathbb{N}$, lies: -3 ist kein Element der ganzen Zahlen (ist keine ganze Zahl). ▲

- $A \Rightarrow B$ (**Implikation**) lies: „Aus (Aussage) A folgt (Aussage) B“ bzw. „Wenn A, dann B“ oder „A impliziert B“. Alternativ sagt man auch „A ist hinreichend für B“ bzw. „B ist notwendig für A“.

Beispiel:
„Wenn die Sonne scheint, dann ist es Tag.“ Als sogenannte aussagenlogische Formel ist dies $A \Rightarrow B$, wobei A die Aussage „Die Sonne scheint.“und B die Aussage „Es ist Tag.“ sind. Man kann auch sagen, dass das Scheinen der Sonne hinreichend für den Tag ist oder, dass es notwendig ist, dass es Tag ist, damit die Sonne scheint. ▲

- $A \Leftrightarrow B$ (**Äquivalenz**) lies: „A genau dann, wenn B.“

Achtung: Bei Äquivalenz müssen beide Implikationen (Richtungen) $A \Rightarrow B$ *und* $B \Rightarrow A$ gelten!

Beispiel:
„Die Sonne scheint genau dann, wenn es Tag ist.“
Hier wäre zwar die Hinrichtung („Wenn die Sonne scheint, dann ist es Tag.“) in Ordnung, aber die Rückrichtung („Wenn es Tag ist, dann scheint die Sonne.“) ist bei Wolken oder Sonnenfinsternis ungültig.
Dagegen ist folgende Aussage in beiden Richtungen wahr: „Wasser gefriert unter normalen Umständen genau dann, wenn die Temperatur auf oder unter 0°C sinkt.“ ▲

Weitere wichtige Begriffe sind:

- $A \wedge B$ (**Konjunktion**) lies: „A und B“

Beispiel:
„Heute ist das Wetter gut und morgen wird es regnen." Hier sind die Einzelaussagen $A =$"Heute ist das Wetter gut" und $B =$"Morgen wird es regnen". Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, also müsste das Wetter heute gut sein und es muss morgen regnen, damit die Gesamtaussage wahr ist. ▲

- $A \vee B$ (**Disjunktion**) lies: „A oder B", wobei dies ein nicht-ausschließendes Oder ist, also dürfen auch beide Fälle eintreten.[2]

Beispiel:
„In der Mensa gibt es Salat oder Pommes." Eine Disjunktion ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Es würde hier also genügen, wenn es in der Mensa Pommes gibt, damit die Gesamtaussage wahr ist. ▲

- $\neg A$ (**Negation**) lies: „Es gilt nicht A".

Beispiel:
Wenn die Aussage $A =$"Es gibt Pommes." lautet, so wäre nicht-A (oder auch non-A) die Aussage „Es gilt nicht, dass es Pommes gibt" (Kurz: „Es gibt keine Pommes."). ▲

- $M := X$ (**Definition**) lies: „Definiere M als X".

Beispiel:
Mit $M := \mathbb{R}_{>0}$ wird M als die Menge der positiven reellen Zahlen definiert. ▲

- **Vergleichszeichen**[3] wie $x < y$, lies: „x echt kleiner y". Entsprechend ist bei $x \leq y$ auch $x = y$ erlaubt (lies: „x kleiner-gleich y"). Analog $x > y$ bzw. $x \geq y$ für größer bzw. größer-gleich.

Für viele Aussagen werden die folgenden beiden wichtigen **Quantoren** benötigt:

- **Existenzquantor** $\exists$, lies „es gibt (mindestens) ein … (mit der Eigenschaft …) ".
  Manchmal findet man ein Ausrufezeichen hinter dem Existenzquantor ($\exists!$), dann liest man: „Es gibt *genau* ein …".

Beispiel:
$\exists x \in \mathbb{N} : x < 2$, lies: „Es gibt (mind.) ein $x \in \mathbb{N}$ mit $x < 2$" (was übrigens eine wahre Aussage ist, denn $x = 1$ erfüllt dies). ▲

- **Allquantor** $\forall$, lies „für alle … (gilt…) ".

Beispiel:
$\forall x \in \mathbb{N} : x > 0$ lies: „Für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $x > 0$", was offensichtlich eine wahre Aussage ist. ▲

Häufig werden diese Quantoren miteinander verbunden, um komplexere Aussagen formulieren zu können.

- $\forall x \exists y$ lies: „Für alle x gibt es ein y derart, dass … "

---

2 In der Alltagssprache wird die Disjunktion meist nicht so, sondern exklusiv verwendet.
3 Falls es Ihnen schwer fällt, sich zu merken, auf welcher Seite die größere Zahl steht: Das Zeichen ist dort größer, wo die größere Zahl steht (z. B. $1 < 5$).

- $\exists x \forall y$ lies: „Es gibt ein x derart, dass für alle y gilt … “.

Beispiel:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{Z}:\ n = -z$$

Zum Verstehen lesen wir uns die Aussage vor: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es (mind.) ein $z \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $n = -z$. Das kann man noch etwas verständlicher formulieren: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine ganze Zahl z, sodass $n = -z$ gilt. Diese Aussage ist offensichtlich wahr, da die ganzen Zahlen lediglich die Erweiterung der natürlichen Zahlen (und die Null) durch die entsprechenden negativen Zahlen sind.
Dreht man die Quantoren um, so ändert sich im Allgemeinen die Aussage ganz erheblich. Hier wäre dies:

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{Z}:\ n = -z$$

Damit dies nun wahr wäre, müsste es eine natürliche Zahl geben, sodass jede (!) ganze Zahl (mit (-1) multipliziert) als diese eine(!) natürliche Zahl dargestellt werden kann. Das ist offensichtlich falsch. So gibt es kein $n \in \mathbb{N}$, was sowohl für $z_1 = -2$ und $z_2 = -3$ erfüllt, dass $n = -(-2) = 2$ und zugleich $n = -(-3) = 3$ ist. ▲

Verständnisfrage 4

a) Nutzen Sie die erlernten Zeichen, um den folgenden Text so weit wie möglich in aussagenlogischen Formeln zu formulieren (stichpunktartig genügt). Zum besseren Verständnis, hier zunächst ein Beispiel:
„Wenn Tobias den Zug verpasst, dann wird er zu spät kommen und Ärger haben.“
Lösung: Mit A = „Tobias verpasst den Zug.“, B = „Er kommt zu spät.“ und C = „Er hat Ärger.“ ergibt sich als aussagenlogische Formulierung:

$$A \Rightarrow (B \wedge C)$$

Hier nun der Text, den Sie bitte bearbeiten:
Auf dem Weg zur Arbeit fiel Tobias ein, dass er noch Anna anrufen und von Bernd das geliehene Geld zurückverlangen wollte. Verärgert stellte Tobias fest, dass immer genau dann, wenn Bernd sich von ihm Geld lieh, dieser auf keine Nachrichten mehr reagierte. Angeblich sei der Akku defekt oder er hätte das Klingeln überhört.
„Es wird Stress geben, wenn er diese Ausreden wieder bringt!“, dachte Tobias.
„Ich wette, es wird heute eine Gelegenheit geben, ihn zur Rede zu stellen.“
Tatsächlich lief Bernd gerade über den Parkplatz, als Tobias ankam.
„Hey Bernd, zahlst du mir gleich das Geld zurück oder muss ich dir noch tagelang hinterher rennen?“
„Ja!“, rief dieser noch hastig zurück, bevor er im Gebäude verschwand.

b) Was passiert, wenn Sie in der Aussage „Für alle Mütter gilt, dass jede mindestens ein Kind hat“ die Quantoren tauschen? Es bietet sich an, M als die Menge aller Mütter und K als die Menge aller Kinder zu verwenden, wenn Sie den Satz in eine aussagenlogische Formel überführen.

c) Wahr oder falsch? $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{Q}:\ x \cdot y = 1$. ■

1.3 Mengenlehre

Für Menschen ist es völlig natürlich, in Mengen zu denken: Ein Baum ist ein Element der Menge der Pflanzen, eine Möwe ist ein Element der Menge der Vögel, welche wiederum eine Teilmenge der Menge der Tiere ist. Die Mathematik nimmt dies auf und verwendet diese Denkart als Grundlage für alle weiteren Betrachtungen. Daher ist es sehr wichtig, ein Grundverständnis von Mengen zu haben und sie lesen und verstehen zu können.

1.3.1 Schreibweise und Aufbau

Objekte einer Menge heißen **Elemente**. Die Anzahl an Elementen einer Menge ist ihre **Kardinalität** (Mächtigkeit) und wird mit $card$ abgekürzt. Liegt keine Verwechslungsgefahr vor, so kann man auch Betragsstriche um die Menge schreiben, wenn man die Kardinalität angeben möchte.

Beispiel und Bemerkungen:

- $M = \{5, 7, 9\} \Rightarrow \text{card}(M) = 3$, denn die Menge M enthält genau drei Elemente (nämlich die Zahlen 5, 7 und 9). Liegt keine Verwechslungsgefahr vor, so kann man auch $|M| = 3$ schreiben.
- Eine Menge M heißt endlich, wenn $\text{card}(M) < \infty$.
- $\text{card}(M) = 0 \;\Leftrightarrow\; M = \{\,\}$ (leere Menge, alternatives Symbol: $\emptyset$) ▲

Kommen wir nun zum allgemeinen Aufbau einer Menge. Es gibt grundsätzlich zwei Arten, Mengen aufzuschreiben, nämlich die aufzählende und die beschreibende Darstellung.

In der **aufzählenden Darstellung** werden die Elemente alle hintereinander aufgeschrieben. Hierbei ist zu beachten, dass die Reihenfolge an sich zwar keine Rolle spielt, man aber üblicherweise aufsteigend sortiert (ggf. alphabetisch). In einer Menge kommen keine Elemente doppelt vor.

Beispiel:

$$\{3, -9, 3, 3, 1\} = \{1, 3, -9\} = \{-9, 1, 3\}$$

Hier würde man die letzte Schreibweise präferieren. ▲

Ist das Muster offensichtlich, so kann man auch eine große oder gar unendliche Menge durch die „Pünktchenschreibweise“ aufzählend darstellen. Insbesondere bei sehr einfachen Aufzählungen ist dies üblich.

Beispiel:
Hier je ein Beispiel für eine endliche und eine unendliche Menge:

$$\{1,2,3,\ldots,42\} \quad \text{und} \quad \{2,4,6,8,10,\ldots\}$$ ▲

Oft ist es nicht sinnvoll oder gar möglich, alle Elemente konkret aufzuschreiben, dann brauchen wir die **beschreibende Darstellung**. In Bild 1.5 wird der typische Aufbau an einem Beispiel zusammengefasst.

$$\underbrace{\{\, x \in \mathbb{R}}_{\text{Was betrachte ich?}} \mid \underbrace{x \leq 3,\ x > -2 \,\}}_{\text{Welche Eigenschaften sollen erfüllt sein?}}$$

Bild 1.5 Aufbau einer Menge in beschreibender Darstellung

Schauen wir uns dies nun genauer an.

Beispiel:

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3,\ x > -2\}$$

Lies: „M ist definiert als die Menge aller x aus $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $x \leq 3$ und $x > -2$ sein muss." Anders gesagt sind damit alle reellen Zahlen gemeint, die zwischen −2 und 3 (ohne −2, mit 3) liegen.
Alternative Schreibweisen für diese Menge wären auch:

$$M = \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq 3,\ x > -2\} \quad \text{oder} \quad M = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 3 \wedge x > -2\}. \qquad \blacktriangle$$

Anmerkung:
Mengen müssen nicht unbedingt Zahlen enthalten. Man kann beispielsweise auch die Menge der Menschen, mit denen man befreundet ist, aufschreiben:

$$\{\text{Stefan, Gina, Andy},\ldots\} \quad \text{oder} \quad \{m \in \text{Menschen} \mid \text{Ich bin befreundet mit } m\} \qquad \blacktriangle$$

Verständnisfrage 5

a) Wahr oder falsch? Bitte begründen Sie (ggf. mit einem Gegenbeispiel).
   - $\text{card}(\{-5,-4,0,4,42\}) = 4$
   - Zwei Mengen sind genau dann identisch, wenn sie dieselbe Kardinalität haben.
   - $\text{card}\left(\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n^2 \leq 49\}\right) = 8$

b) Schreiben Sie die Menge B aller Bücher (Romane), die Sie besitzen, einmal in aufzählender (ggf. irgendwann mit Pünktchen) und einmal in beschreibender Darstellung auf.

1.3.2 Mengenoperationen

Es seien im Folgenden A, B, C drei beliebige Mengen. Wir wollen uns ansehen, wie man die Beziehungen von Mengen beschreiben kann und was der Schnitt bzw. die Vereinigung von Mengen ist.

- **Teilmenge:** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A:\ a \in B$, lies: „$A$ ist Teilmenge von B."

A ist also genau dann Teilmenge von B, wenn jedes Element aus A auch in B liegt. Manchmal bezeichnet man B dann auch als Obermenge (für A).

Stichwortverzeichnis