

Manfred Brill

*Mathematik für Informatiker*

Hanser Verlag

ISBN 3-446-22802-0

©2005

Folien zum Kapitel 1

Zahlensysteme

# 1.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen

# Die natürlichen Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

# Die natürlichen Zahlen

## Assoziativität der Addition

Es gilt  $(l + m) + n = l + (m + n)$  für beliebige natürliche Zahlen  $l, m$  und  $n$ .

## Assoziativität der Multiplikation

Es gilt  $(l \cdot m) \cdot n = l \cdot (m \cdot n)$  für beliebige natürliche Zahlen  $l, m$  und  $n$ .

# Die natürlichen Zahlen

## Kommutativität der Multiplikation

Es gilt  $m \cdot n = n \cdot m$  für beliebige natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ .

## Kommutativität der Addition

Es gilt  $m + n = n + m$  für beliebige natürliche Zahlen  $m$  und  $n$ .

# Die natürlichen Zahlen

## Neutrales Element der Multiplikation

Es gilt  $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$  für jede beliebige natürliche Zahl  $m$ .

## Distributivität

Es gilt  $l(m + n) = lm + ln$  und  $(m + n)l = ml + nl$  für beliebige natürliche Zahlen  $l, m$  und  $n$ .

# Die Peano-Axiome

**P1** 1 ist eine natürliche Zahl.

**P2** Jede natürliche Zahl  $n$  besitzt einen Nachfolger  $n^+ = n + 1$ .

**P3** Es gibt keine natürliche Zahl  $n$  mit  $n^+ = 1$ .

# Die Peano-Axiome

**P4** Gilt für  $m$  und  $n$  die Beziehung  $m^+ = n^+$ , dann ist  $m = n$ .

**P5** Eine Aussage, die für 1 und für jeden Nachfolger  $n^+$  jeder natürlichen Zahl, für die sie richtig ist, gilt, ist richtig für alle natürlichen Zahlen.

# Ordnungsbegriffe

Eine natürliche Zahl  $m$  ist „kleiner als“  $n$ , in Zeichen  $m < n$ , wenn es eine natürliche Zahl  $k$  gibt mit

$$m + k = n.$$

# Die ganzen Zahlen

$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

# Die ganzen Zahlen

## Neutrales Element der Addition

Es gilt  $n + 0 = 0 + n = n$  für jede beliebige ganze Zahl  $n$ .

## Inverses Element der Addition

Zu einer beliebigen ganzen Zahl  $n$  gibt es eine ganze Zahl  $(-n)$  mit  $n + (-n) = n - n = 0$ .

# Ordnungsbegriffe

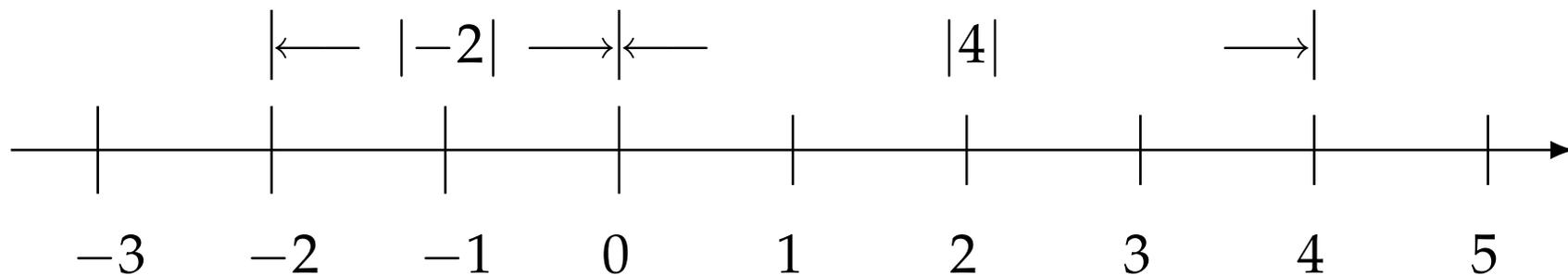
$n \geq 0$  für eine ganze Zahl bedeutet, dass  $n$  größer oder höchstens gleich 0 ist.

# Der Absolutbetrag

Der Absolutbetrag  $|x|$  einer ganzen Zahl  $x$  ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

# Der Absolutbetrag



**Abbildung 1:** Der Absolutbetrag ganzer Zahlen

# Satz

Der Absolutbetrag einer ganzen Zahl erfüllt  $|n| \geq 0$ .

# Rechenregeln

- $|n \cdot m| = |n| \cdot |m|,$
- $|n + m| \leq |n| + |m|,$
- $|n - m| \leq |n| + |m|,$  und
- $||n| - |m|| \leq |n - m|.$

# Die rationalen Zahlen

Rationale Zahlen sind gegeben als Brüche von ganzen Zahlen:

$$x = \frac{p}{q}.$$

# Die rationalen Zahlen

## Inverses Element der Multiplikation

Zu einer beliebigen rationalen Zahl  $q \neq 0$  gibt es eine rationale Zahl  $q^{-1}$  mit  $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ .

# Potenzrechnung

$$q^n = \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n\text{-mal}}$$

Der *Exponent*  $n$  ist eine ganze Zahl, die *Basis*  $q$  eine rationale Zahl.

# Potenzrechnung

- $q^0 = 1,$
- $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$  für eine natürliche Zahl  $n,$
- $q^n \cdot q^m = q^{n+m},$  und
- $(q^n)^m = q^{n \cdot m}$  für ganze Zahlen  $n$  und  $m.$

# Wurzeln

Die  $k$ -te Wurzel einer rationalen Zahl ist gegeben als Lösung  $x$  der Gleichung

$$x^k = q.$$

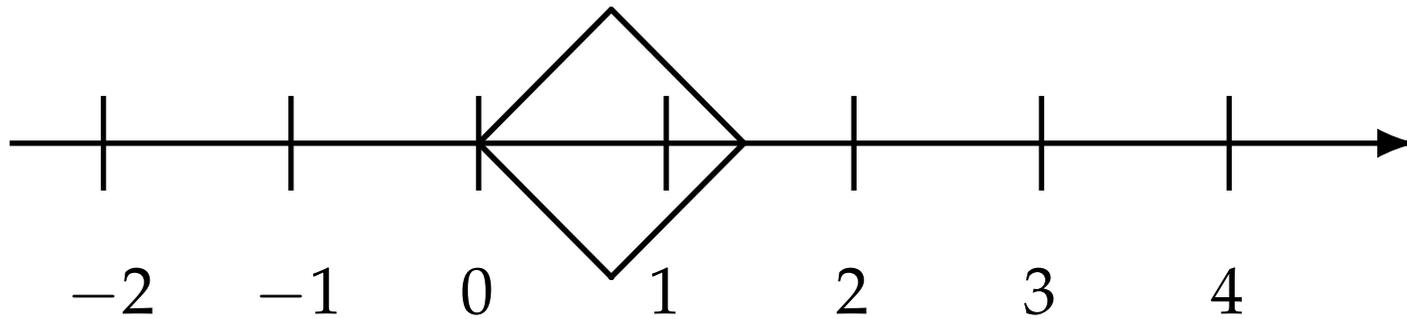
Geschrieben:

$$x = \sqrt[k]{q} = q^{\frac{1}{k}}.$$

# Satz

$\sqrt{2}$  ist keine rationale Zahl.

$\sqrt{2}$



**Abbildung 2:** Konstruktion der irrationalen Zahl  $\sqrt{2}$

# Beispiele irrationaler Zahlen

$x$	Dezimaldarstellung
$e$	2,718 281 828 4 ...
$\pi$	3,141 592 653 5 ...
$1^\circ = \frac{\pi}{180}$	0,017 453 292 5 ...
$\sqrt{2}$	1,414 213 562 3 ...
$\sqrt{3}$	1,732 050 807 5 ...
$\ln(2)$	0,693 147 180 5 ...
$\ln(10)$	2,302 585 092 9 ...

# Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind gegeben durch alle rationalen und alle irrationalen Zahlen.

# Logarithmen

Die reelle Zahl  $x$ , die für gegebene Zahlen  $a$  und  $b$  die Gleichung

$$a^x = b$$

erfüllt heißt der *Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$* :

$$x = \log_a (b).$$

$$b = a^{\log_a (b)}$$

# Wichtige Basen

- $a = e$ , die Euler'sche Zahl:  $\ln(b)$ ,
- $a = 10$ :  $\log(b)$ ,
- $a = 2$ :  $\text{ld}(b)$ .

# Rechenregeln

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x),$$

# Potenzen und Logarithmen

$$a^x = \left( e^{\ln(a)} \right)^x = e^{x \ln(a)}.$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

# 1.2 Die komplexen Zahlen

$$\sqrt{-1} = i$$

# Die komplexen Zahlen

Die *imaginäre Einheit*  $i$  erfüllt  $i^2 = -1$ .

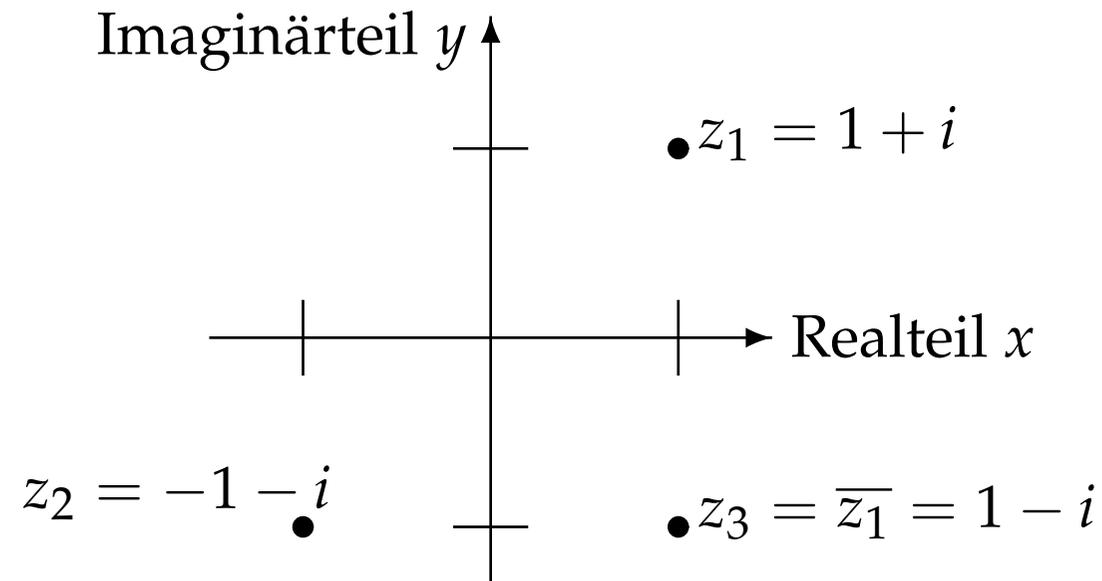
Jede komplexe Zahl  $z$  ist darzustellen durch

$$z = x + iy.$$

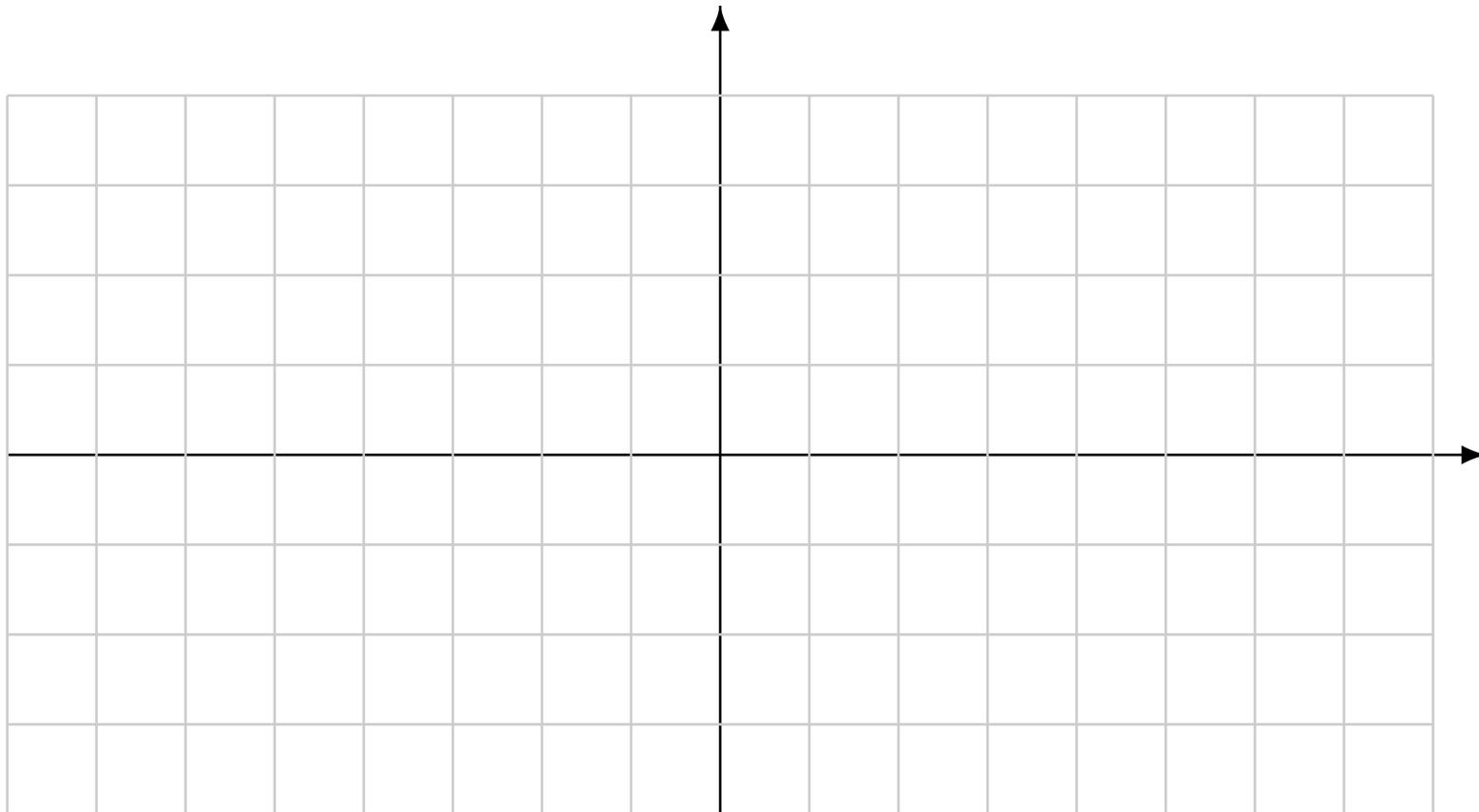
$x$  heißt *Realteil*,  $y$  *Imaginärteil* der komplexen Zahl  $z$ .

$\bar{z} = x - iy$  heißt *konjugiert komplexe Zahl* zu  $z = x + iy$ .

# Gauß'sche Zahlenebene



# Gauß'sche Zahlenebene



# Addition komplexer Zahlen

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

# Multiplikation komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

# Absolutbetrag

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ falls } z = x + iy.$$

# Division komplexer Zahlen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

# Rechenregeln

Für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2$  gilt:

$$\blacksquare z\bar{z} = |z|^2,$$

$$\blacksquare \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,$$

$$\blacksquare \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$

$$\blacksquare \overline{\bar{z}} = z.$$

# Polarkoordinaten

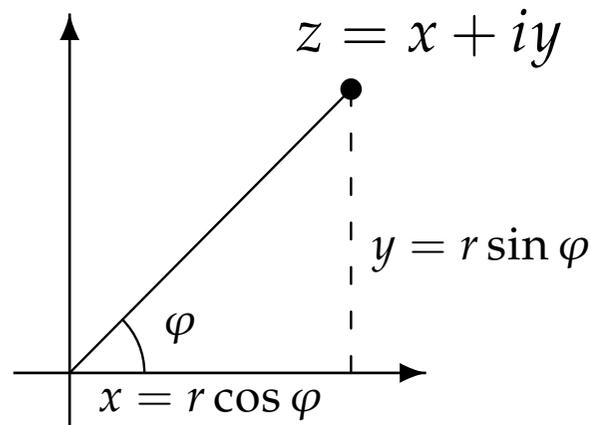


Abbildung 3: Die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

# Polarkoordinaten

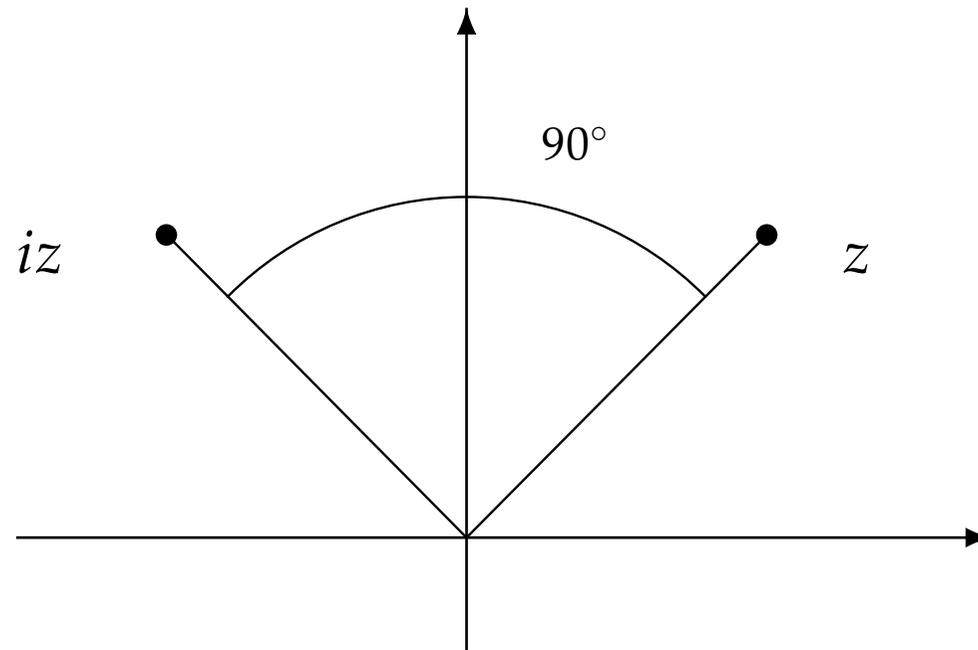
$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

$\varphi = + \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$  im Fall von  $y \geq 0$ , das Minuszeichen für  $y < 0$ .

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

# Multiplikation mit $z = i$



# Wurzelrechnung

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

# Einheitswurzeln

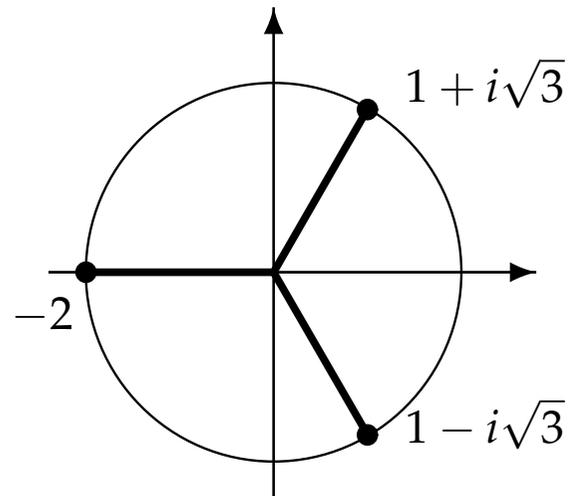


Abbildung 4:  $\sqrt[3]{-8}$

# Einheitswurzeln

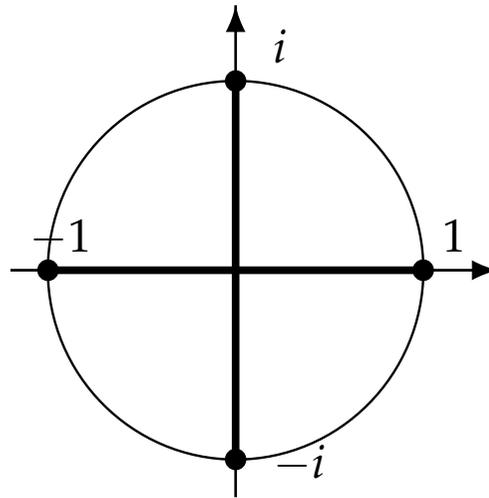


Abbildung 5:  $\sqrt[4]{1}$

# 1.3 Summen und Produkte

# Summen

Die Summe der  $n$  Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  wird geschrieben als

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

$\Sigma$  heißt *Summenzeichen*,

$i$  *Laufindex*, 1 ist die *untere* und  $n$  die *obere Summationsgrenze*.

# Produkte

Das Produkt von  $n$  Zahlen wird geschrieben als

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n,$$

$\prod$  heißt *Produktzeichen*,

die Grenzen *Multiplikationsgrenzen*.

# Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i,$$

# Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i, m < n,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

# Rechenregeln

$$\prod_{i=1}^n c \cdot a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i,$$

$$\prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i,$$

# Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^m b_j \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_i b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j. \end{aligned}$$

# Indextransformationen

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

# Fakultät

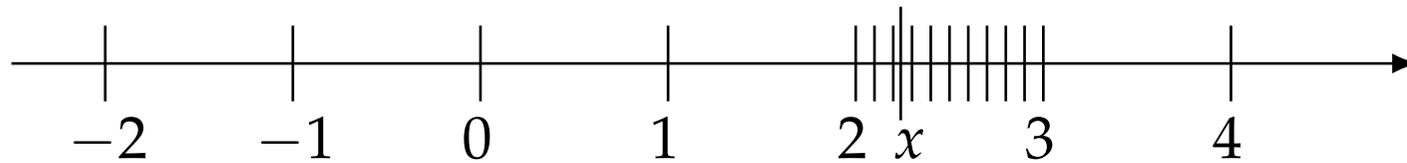
$$\begin{aligned}n! &= \prod_{i=1}^n i \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n\end{aligned}$$

# Stirling'sche Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

# 1.4 Stellenwertsysteme

# Dezimaldarstellung



**Abbildung 6:** Konstruktion der Dezimaldarstellung einer reellen Zahl

# Dezimaldarstellung

$$\begin{aligned}x &= g + d_{-1} \cdot 10^{-1} + d_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + d_{-k} \cdot 10^{-k} \\ &= g + \sum_{i=1}^k d_{-i} 10^{-i}.\end{aligned}$$

# Dezimalbrüche und rationale Zahlen

Der Dezimalbruch einer rationalen Zahl ist endlich oder periodisch, und umgekehrt stellt jeder solche Dezimalbruch eine rationale Zahl dar.

Genau die irrationalen Zahlen entsprechen den nicht-periodischen unendlichen Dezimalbrüchen.

# Dezimalbruch zur Basis $b > 1$

Schritt 1: Bestimmen Sie für  $q = \frac{m}{n}$  die natürliche Zahl  $g$  mit  $m = g \cdot n + r_0$ , mit  $0 \leq r_0 < b$ .

Bestimmen Sie die Darstellung von  $g$  zur Basis  $b$ .

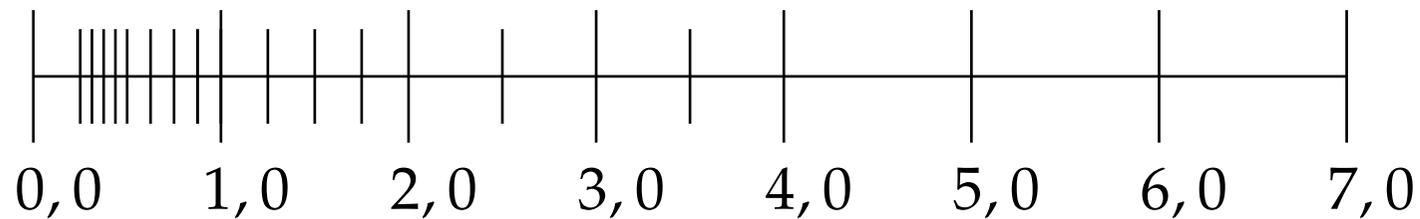
Schritt 2: Berechnen Sie sukzessive  $b \cdot r_i = d_{i+1} \cdot n + r_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, k - 1$ ; bis ein Index  $k$  erreicht wird mit  $r_k = 0$ , oder eine Periode erreicht ist.

# 1.5 Zahlendarstellung im Computer

# Gleitkommasysteme

	$b$	$p$	$e_{min}$	$e_{max}$	normalisiert?
IEC-Norm, single format	2	23	-125	128	ja
IEC-Norm, double format	2	52	-1021	1024	ja
IEC-Norm, extended format und Intel-Mikroprozessoren	2	64	-16381	16384	ja

# Gleitkommazahlen



**Abbildung 7:** Die Verteilung von Gleitkommazahlen für  $b = 2$ ,  $e_{min} = -1$ ,  $e_{max} = 3$ , Mantissenlänge  $p = 3$  und Skalierungsfaktor  $s = 2^{-3}$

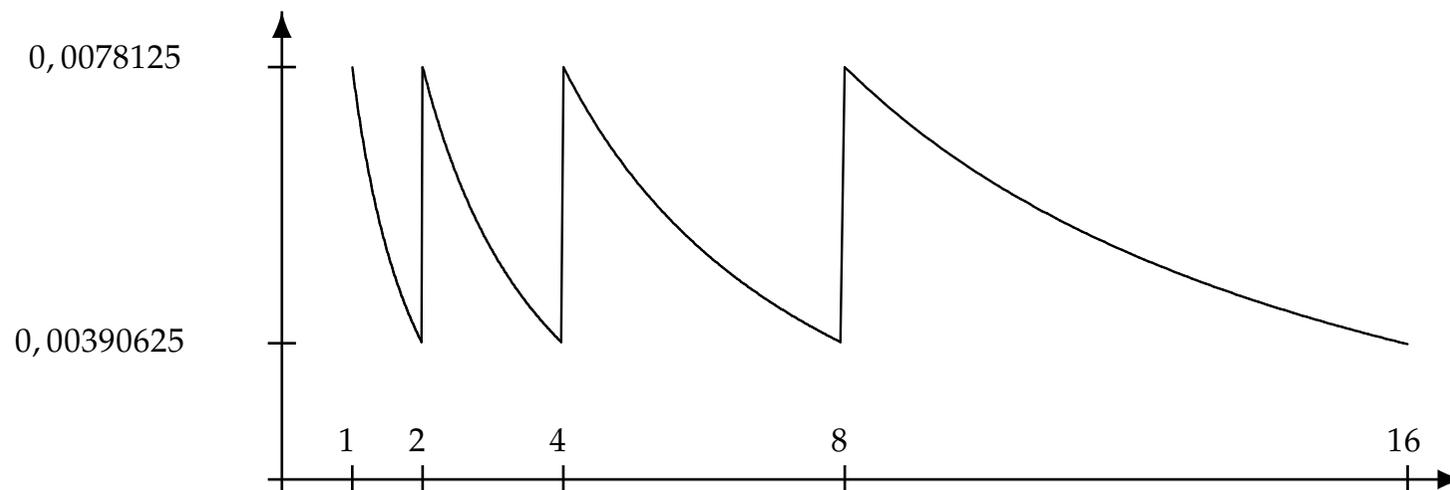
# Maschinengenauigkeit

Die *Maschinengenauigkeit*  $\epsilon_M$  eines gegebenen Gleitkomma-Systems ist der Abstand zwischen  $1,0$  und der nächsten darstellbaren Gleitkommazahl größer als  $1,0$ .

# Abstände

Der Abstand zwischen einer normalisierten Gleitkommazahl  $x$  und einer direkt benachbarten Gleitkommazahl ist mindestens  $b^{-1}\epsilon_M|x|$  und höchstens  $\epsilon_M|x|$ , falls  $x$  oder der Nachbar nicht Null ist.

# Wobbling



**Abbildung 8:** Die relative Dichte der Gleitkommazahlen für  $b = 2, p = 8$

# Gleitkomma-Addition

Schritt 1: Verändern Sie die Mantissen  $M_1$  und  $M_2$  ohne Rundungsfehler, sodass die Exponenten gleich sind. Als Ergebnis dieses Schritts liegen jetzt die Mantissen  $M'_1, M'_2$  und der Exponent  $E'$  vor.

Schritt 2: Berechnen Sie die Summe bzw. Differenz der Mantissen  $M'_1, M'_2$ . Das Ergebnis ist eine nicht-normalisierte Mantisse  $M'$ .

# Gleitkomma-Addition

Schritt 3: Bilden Sie durch Veränderung des Exponenten und eventuelle Rundung auf die vorgegebene Mantissenlänge der Gleitkommazahlen eine normalisierte Gleitkommazahl  $M \cdot b^e$ .

# Gleitkomma-Multiplikation

Schritt 1: Bilden Sie das Produkt beziehungsweise den Quotienten der Mantissen.

Schritt 2: Bilden Sie die Summe beziehungsweise die Differenz der Exponenten.

Schritt 3: Bilden Sie durch Veränderung des Exponenten und eventuelles Runden auf die vorgegebene Mantissenlänge der Gleitkommazahlen eine normalisierte Gleitkommazahl  $M \cdot b^e$ .

# Der Auslöschungseffekt

$$99 - 70\sqrt{2} = \sqrt{9801} - \sqrt{9800} = \frac{1}{\sqrt{9801} + \sqrt{9800}} = 0,00505063 \dots$$

Mantissenlänge	$99 - 70\sqrt{2}$	$\sqrt{9801} - \sqrt{9800}$	$\frac{1}{\sqrt{9801} + \sqrt{9800}}$
2	1,0	0,0	0,0050
4	0,02000	0,01000	0,005051
6	0,00530000	0,00510000	0,00505063

# 1.6 Matrizen

# Matrix

Ein rechteckiges Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit Zahlen  $a_{ij}$  heißt  $m \times n$ -Matrix mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten.

# Zeilen und Spalten

Die senkrecht untereinander stehenden Elemente der Matrix sind die *Spalten*, die waagrecht nebeneinander stehenden Elemente die *Zeilen* der Matrix.

Die Elemente  $a_{ii}$  werden *Diagonalelemente* genannt.

# Quadratische Matrizen

Eine Matrix mit genauso vielen Spalten wie Zeilen heißt *quadratisch*.

# Diagonalmatrix

Eine Matrix  $D$ , bei der nur die Diagonalelemente von Null verschieden sind, heißt *Diagonalmatrix*, geschrieben

$$D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}).$$

# Transponierte Matrix

Die zu einer  $m \times n$ -Matrix  $A$  transponierte Matrix  $A^T$  ist die  $n \times m$ -Matrix mit  $a_{ij}^T = a_{ji}$ .

# Symmetrische Matrix

Eine quadratische Matrix mit  $A = A^T$  heißt *symmetrisch*.

# Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

# Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  sind *gleich*, wenn sie dieselbe Zeilen- und Spaltenanzahl besitzen und die einander entsprechenden Elemente *alle* übereinstimmen.

# Matrixarithmetik

Sind  $A$  und  $B$   $m \times n$  Matrizen, ist ihre *Summe*  $A + B$  die Matrix, die durch Addition der einander entsprechenden Elemente entsteht.

Analog ist die *Differenz*  $A - B$  durch elementweises Subtrahieren gegeben.

Matrizen, die sich in Zeilen- oder Spaltenanzahl unterscheiden, können nicht addiert oder subtrahiert werden.

# Matrixarithmetik

Ist  $A$  eine Matrix und  $c$  eine reelle Zahl, dann ist das Produkt  $c \cdot A$  die Matrix, die durch Multiplikation jedes Elements von  $A$  mit  $c$  entsteht.

# Nullmatrix

Eine Matrix, deren Elemente alle Null sind, wird *Nullmatrix* genannt.

# Rechenregeln

Sind  $A, B$   $m \times n$ -Matrizen und  $\lambda$  eine reelle Zahl, dann gilt

$$(A + B)^T = A^T + B^T, (\lambda A)^T = \lambda A^T, (A^T)^T = A.$$

# Matrixprodukt

Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $B$  eine  $n \times p$ -Matrix, heißt die  $m \times p$ -Matrix  $C$  mit

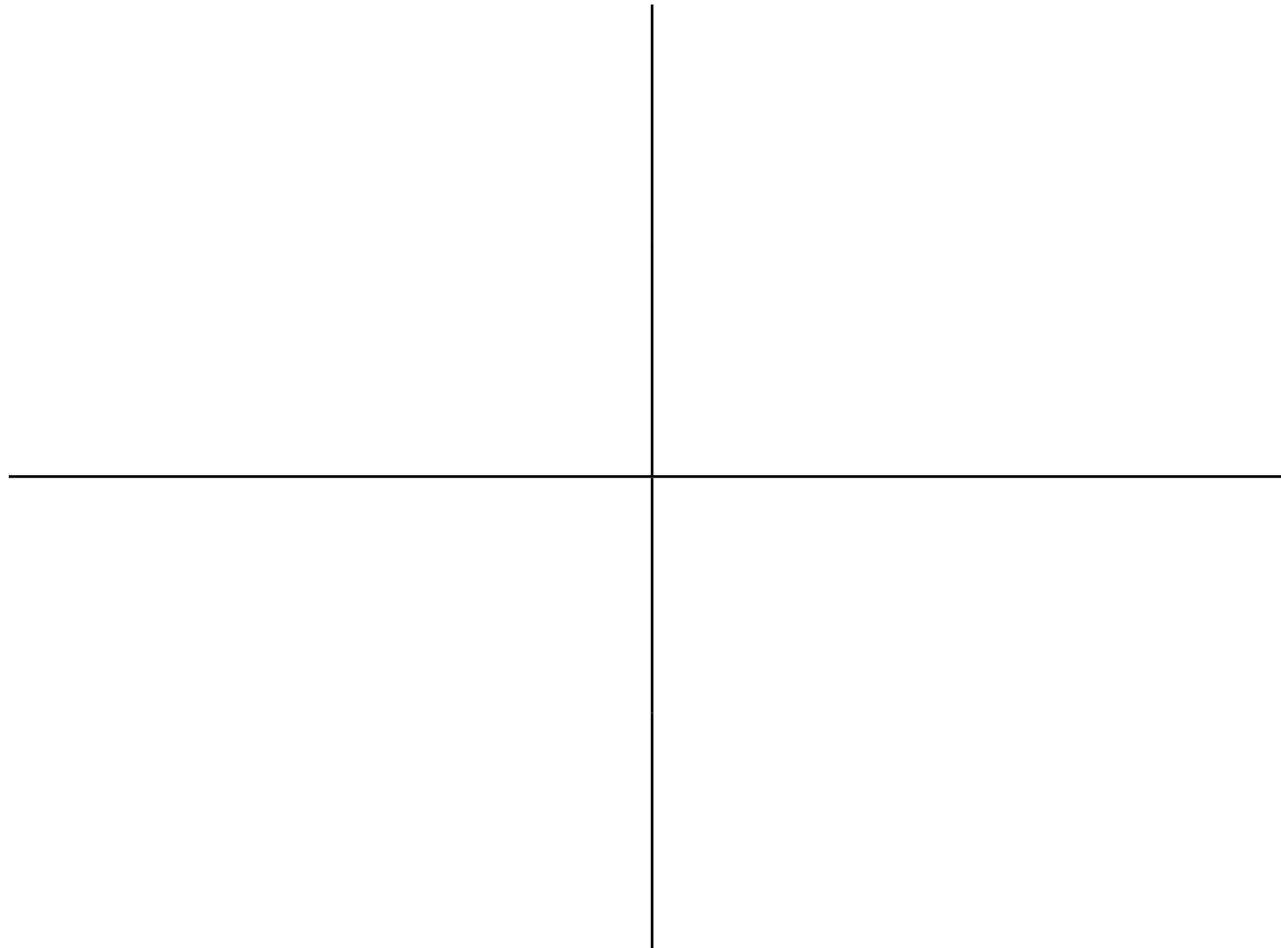
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

das Produkt  $C = A \cdot B$  der Matrizen  $A$  und  $B$ .

# Falk'sches Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

# Falk'sches Schema







# Rechenregeln

- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB),$
- Assoziativität:  $(AB)C = A(BC),$
- Distributivität:  $A(B + B') = AB + AB'$  und  $(A + A')B = AB + A'B,$  und
- $(AB)^T = B^T A^T.$

# Blockstrukturen

Sind die Matrizen  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$  so in Blöcke zerteilt, dass alle folgenden Matrixprodukte existieren, dann berechnet sich  $A \cdot B$  durch

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

# Multiplikation nach Strassen

Schritt 1: Zerlegen Sie die  $2^N \times 2^N$ -Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C = A \cdot B$  in Blöcke:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

# Multiplikation nach Strassen

Schritt 2: Berechnen sie die folgenden Matrizen:

$$W_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}),$$

$$W_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$$

$$W_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}), W_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}),$$

$$W_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22},$$

$$W_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}),$$

$$W_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22}).$$

# Multiplikation nach Strassen

Schritt 3: Das Ergebnis  $C$  ist gegeben durch:

$$C_{11} = W_1 + W_4 - W_5 + W_7,$$

$$C_{12} = W_3 + W_5,$$

$$C_{21} = W_2 + W_4,$$

$$C_{22} = W_1 + W_3 - W_2 + W_6.$$

# Die Einheitsmatrix

Eine quadratische Diagonalmatrix mit  $a_{ij} = \delta_{ij}$  heißt *Einheitsmatrix*, als Symbol wird  $I$  verwendet.

Für die  $n \times n$ -Einheitsmatrix wird auch das Symbol  $I_n$  verwendet.

# Die inverse Matrix

Ist  $A$  eine quadratische Matrix und gibt es eine Matrix  $B$  mit  $AB = I = BA$ , ist  $A$  *invertierbar* oder *regulär*.

$B = A^{-1}$  heißt die *Inverse* von  $A$ .

Nicht invertierbare Matrizen heißen *singulär*.

# Satz

Sind  $B$  und  $C$  Inverse einer quadratischen Matrix  $A$ , dann ist  $B = C$ .

# Satz

Sind  $A$  und  $B$  reguläre quadratische Matrizen, gilt:

- $A^{-1}$  ist regulär mit  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- Das Produkt von regulären Matrizen ist regulär mit  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- $A^T$  ist regulär mit  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- Für  $\lambda \neq 0$  gilt  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ .
- Eine Diagonalmatrix  $D$  mit  $a_{11}a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0$  ist regulär mit der Inversen  $\text{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$ .