Nutzungshinweise

- Über **Lesezeichen** (bzw. **Inhalt**) in der Navigationsspalte auf der linken Seite kann das **Inhaltsverzeichnis** zu den einzelnen Kapiteln aufgerufen werden.
  Es dient der schnellen Navigation innerhalb der Kapitel und Abschnitte und sollte eingeschaltet werden und bleiben.
- Mit dem „+“-Zeichen (oder ähnlichen Symbolen in Abhängigkeit vom Dokumentenbetrachter) lassen sich die **Kapitel**, **Abschnitte** und die **Unterabschnitte** sowie die **Lösungen** dazu einblenden und auswählen.
- Auf jeder Seite befindet sich **oben** eine **Navigationsleiste** (Muster siehe oben),
  über die mit Symbolen wie ▶ innerhalb der jeweiligen Kapitel
  - die Aufgabenseiten vor oder zurück geblättert oder
  - zwischen Aufgaben- und Lösungsseiten hin und her gesprungen werden kann.

  Im Einzelnen:

  ▼ - zur nächsten Aufgabenseite

  ▲ - zur vorigen Aufgabenseite

  ◀ - von der Lösungsseite wieder zur Aufgabenseite

  ▶ - von der Aufgabenseite zur Lösungsseite

- Ein ausführlicher Lösungsweg (falls vorhanden) ist über den Link Lösungsweg von der Lösungsseite erreichbar.

Diese Aufgabensammlung wird weiter vervollkommnet, was sowohl die Anzahl der Aufgaben als auch die Lösungswege betrifft.

Trotz großer Sorgfalt sind Fehler nicht zu vermeiden. Für diesbezügliche und auch andere kritische Hinweise sind die Autoren weiterhin sehr dankbar.

Kontakte: wolfgang.eichholz’at’hs-wismar.de
eberhard.vilkner’at’hs-wismar.de

Links: Carl Hanser Verlag: - Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik
- E-Book

Letzte Aktualisierung: November 2018

Grundlagen: Mengen

1.1-1 Aufgabe

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 7\}$. Ermitteln Sie: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $\overline{B}$.

1.1-2 Aufgabe

Gegeben seien die Mengen $I_1 = [1, 3]$, $I_2 = (2, 5]$. Ermitteln Sie: $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$, $I_1 \setminus I_2$, $I_2 \setminus I_1$ und $\overline{I_2}$.

1.1-3 Aufgabe

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit möglich:

a) $A \cap (B \cap A)$ b) $\varnothing \cap (A \cap B)$ c) $(A \cap B) \cup \varnothing$
d) $A \cap [(A \cap B) \cup B]$ e) $A \cap (B \cap B)$ f) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$

1.1-4 Aufgabe

Überprüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke gleich sind:

a) $A \cup (B \setminus C)$? $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$
b) $A \setminus (B \cap C)$? $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
c) $A \setminus (B \cup C)$? $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.1-5 Aufgabe

Schreiben Sie als Ungleichung:

a) $x \in (4, 7)$ b) $x \in (-\infty, 5)$ c) $x \in [-3, -1]$
d) $x \in [3, \infty)$ e) $x \in [-8, 0]$ f) $x \in (-8, 0)$

1.1-6 Aufgabe

Schreiben Sie in Intervallschreibweise:

a) $-2 \le x \le 5$ b) $-2 < x \le 5$ c) $4 \le x$
d) $5 < x < 7$ e) $-\infty < x < \infty$ f) $x < 8$

1.1-7 Aufgabe

Vervollständigen Sie folgende Tabellen:

a)

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
$\{1, 2, c, d\}$	$\{x, y, z\}$				
$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, d\}$				
$\{1, 2, d, e\}$	$\{1, e, m, r, s\}$				
$\{2, 4, 6, ...\}$	$\{1, 3, 5, ...\}$				

b)

I_1	I_2	$I_1 \cup I_2$	$I_1 \cap I_2$	$I_1 \setminus I_2$	$I_2 \setminus I_1$
$(-3, 8]$	$(-\infty, 2)$				
$(-\infty, 6)$	$[0, \infty)$				
$[4, 8]$	$[2, 4]$				
$[8, 9]$	$(0, 5]$				

Grundlagen: Aussagenlogik

1.2-1 Aufgabe
Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die Richtigkeit folgender Aussage:
$(p \wedge q) \rightarrow p$

1.2-2 Aufgabe
Beweisen Sie die die Richtigkeit der DE MORGANschen Regel:
$(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

1.2-3 Aufgabe
Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die Richtigkeit folgender Aussage:
$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Grundlagen: Zahlensysteme

1.4-1 Aufgabe
Stellen Sie folgende Dualzahlen im Dezimalsystem dar:
a) $a_2 = 101$ b) $b_2 = 1{,}01$ c) $c_2 = 1\,100\,101$

1.4-2 Aufgabe
Stellen Sie folgende Dezimalzahlen im Dualsystem dar:
a) $a_{10} = 125$ b) $b_{10} = 1{,}25$ c) $c_{10} = 0{,}125$

1.4-3 Aufgabe
Stellen Sie folgende Dezimalzahlen im Oktalsystem dar:
a) $a_{10} = 12$ b) $b_{10} = 125$ c) $c_{10} = 12\,500$

1.4-4 Aufgabe
Stellen Sie folgende Dezimalzahlen im Hexadezimalsystem dar:
a) $a_{10} = 12$ b) $b_{10} = 125$ c) $c_{10} = 12\,500$

Grundlagen: Reelle Zahlen

1.5-1 Aufgabe
Stellen Sie mit Hilfe des Summen- bzw. Produktzeichens dar:
a) $1+1$ b) $2+3+4+5$ c) $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$

1.5-2 Aufgabe
Berechnen Sie:
a) $(2+3)\cdot(4+5)$ b) $220:\frac{1}{2}+1$ c) $220:(\frac{1}{2}+1)$
d) $(2^3)^4$ e) $2^{(3^4)}$ f) $(a+b)(c+d)$
g) $(a+b)^2$ h) $(a-b)^2$ i) $(a+b)(a-b)$
j) $(a+b)^3$ k) $(a-b)^3$ l) $(a\pm b)^4$

1.5-3 Aufgabe
Schreiben Sie ausführlich und bestimmen Sie:
a) $\sum\limits_{i=1}^{10} i$ b) $\sum\limits_{i=-3}^{3} a$ c) $\sum\limits_{i=0}^{10} a_i\,,\ a_i=i+1$
d) $\sum\limits_{k=1}^{7} a$ e) $\prod\limits_{k=1}^{n} 2$ f) $\prod\limits_{i=1}^{n} i$
g) $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$ h) $\prod\limits_{k=0}^{m-1} x_i\,,\ x_i=2$ i) $\prod\limits_{k=3}^{5} 3k^2$

1.5-4 Aufgabe
Multiplizieren Sie:
a) $(12{,}2x+3{,}7y-5{,}2z)0{,}1a$ b) $-0{,}5a^2(2u^2-3a^3+w^2r)$ c) $(2ax^2-3aby)(5b-4ay^2)$

1.5-5 Aufgabe
Berechnen Sie:
$(4x^3-2x^2+3x-\frac{27}{2}):(2x-3)$

1.5-6 Aufgabe
Klammern Sie alle gemeinsamen Faktoren aus:
a) $2a+16ab$ b) $[(3x-2y)a+(3x-2y)b]-(3x-2y)c$
c) $7a^2x-21ax^2+49a^2x^2$

1.5-7 Aufgabe
Lösen Sie die Klammern auf:
a) $[3a-2(5b-c)]\cdot 3b$ b) $12x-\{[5z-2(4x-3y)]-3[-4(2z+3x)]\}$

Grundlagen: Reelle Zahlen

1.5-8 Aufgabe
Schreiben Sie als Produkt:
a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 4xy + 4y^2$ c) $4u^2 - 9v^2$

1.5-9 Aufgabe
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:
a) $\frac{a}{9} + \frac{a}{12}$ b) $\frac{1}{b-a} + \frac{1}{(b-a)^2}$ c) $\frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2-1}$

1.5-10 Aufgabe
Ein Unternehmen produziert drei verschieden Typen eines Fernsehgerätes. Die nachfolgende Tabelle gibt monatsweise die Umsätze in Mio. € für jeden Typ in einem bestimmten Kalenderjahr an.

Monat	Typ 1	Typ 2	Typ 3	$\sum$
1	2	4	3	9
2	5	6	2	13
3	4	8	5	17
4	6	3	5	14
5	2	4	3	9
6	3	5	2	10
7	3	6	1	10
8	4	2	0	6
9	3	5	1	8
10	5	8	0	13
11	7	8	2	17
12	7	6	2	15
$\sum$	51	65	26	142

u_{ij} sei der Umsatz im i-ten Monat für den Gerätetyp j.
Stellen Sie mit Hilfe des Summenzeichens dar:
a) die monatlichen Umsätze U_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$
b) die Jahresumsätze je Typ U_j, $j = 1, 2, 3$
c) den Gesamtumsatz im Jahr U

Grundlagen: Kombinatorik

1.6-1 Aufgabe
An einem 100m-Lauf nehmen 8 Läufer teil.
Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind theoretisch möglich?

1.6-2 Aufgabe
Wie viele Permutationen der Buchstaben a, b, c, d, e und f gibt es, die mit dc beginnen?
Hinweis: Jeder Buchstabe wird nur einmal benutzt.

1.6-3 Aufgabe
Wie viele Tippmöglichkeiten gibt es beim Spiel 6 aus 49?

1.6-4 Aufgabe
Wie viele Tippmöglichkeiten gibt es beim Spiel 6 aus 49, die zu einem „Dreier“ führen?

1.6-5 Aufgabe
Geben Sie die 256. Permutation von den Elementen a, b, c, d, e, f in lexikographischer Ordnung an.
Hinweis: „a b c d e f“ ist die erste, „a b c d f e“ die zweite und „f e d c b a“ ist die letzte (6! = 720-ste) Permutation.

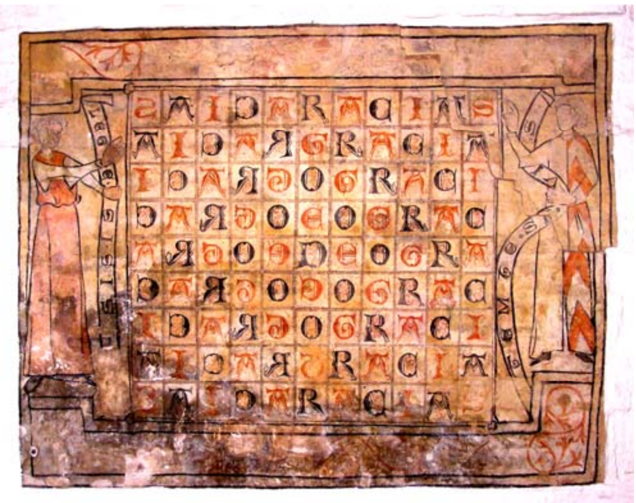
1.6-6 Aufgabe
Ein Student möchte einen der beiden Aktenkoffer A oder B kaufen. Aktenkoffer A ist mit einem sechsstelligen Zahlenschloss ausgestattet, während Aktenkoffer B mit zwei dreistelligen Zahlenschlössern ausgestattet ist. Die Sicherungscodes können beliebig festgelegt werden, wobei für jede Stelle die Ziffern 0 bis 9 zulässig sind.
a) Wie viele Sicherungscodes sind für den Aktenkoffer A möglich?
b) Bietet der Aktenkoffer B eine höhere Sicherheit?

1.6-7 Aufgabe
Auf wie viele verschiedene Möglichkeiten lassen sich die Karten beim Skatspiel verteilen?

1.6-8 Aufgabe
Ein Wirt verspricht seinen sieben Stammgästen an jedem Abend eine Runde Freibier zu spendieren, an dem die Gäste eine neue Sitzordnung einnehmen können.
Wie viele Gläser Bier müsste der Wirt kostenlos ausschenken?

Grundlagen: Kombinatorik

1.6-9 Aufgabe
In der Heiligen-Geist Kirche Wismar gibt es im vorderen Teil der Kirche an der rechten Seitenwand das „DEOGRACIAS-Fresko“, das aus dem Anfang des 14. Jahrhunderts stammt und unter mehreren Kalkübermalungen liegend erst 1968 freigelegt wurde:



Der Ausspruch „DEOGRACIAS“ (= „Gott sei Dank“) kann vom mittigen „D“ aus in alle Richtungen gehend, horizontal und vertikal – meist getreppt – gelesen werden.
Auf wie viel verschiedene Möglichkeiten kann der Ausspruch „DEOGRACIAS“ gelesen werden?

Hinweis: Beginnt man mit dem „D“ im Zentrum und geht dann in eines der vier Viertel, bleibt man in diesem Viertel. Das Buchstabenviertel nach unten rechts mit einer Lösungsmöglichkeit (rot: DEOGRACIAS):

D	E	O	G	R	A
E	O	G	R	A	C
O	G	R	A	C	I
G	R	A	C	I	A
R	A	C	I	A	S

Grundlagen: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1.7-1 Aufgabe
Vereinfachen Sie, soweit es möglich ist:

a) $\left(\sqrt{a^3}\right)^6$ b) $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$ c) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ e) $\sqrt{u^2 - 2u + 1}$

1.7-2 Aufgabe
Vereinfachen Sie:

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{2rc}{l \cdot T}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2r}{l \cdot T}$ b) $\frac{c}{\sqrt{\frac{2rc}{l \cdot T}}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2rc}{l \cdot T}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2r}{l \cdot T}$

1.7-3 Aufgabe
Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich?

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{1}{a}\sqrt{a}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ und $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ und $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2}$

1.7-4 Aufgabe
Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\sqrt{30 + 5\sqrt{11}} \cdot \sqrt{30 - 5\sqrt{11}}$ b) $\sqrt{20 - 8\sqrt{6}} \cdot \sqrt{20 + 8\sqrt{6}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

1.7-5 Aufgabe
Vereinfachen Sie, soweit wie möglich:

a) $\lg x^2$ b) $\ln\,(x^2 \cdot y^2)$ c) $\lg\,(x^2 + y^2)$

d) $\ln\sqrt{a^2 + b^2}$ e) $\ln\left[(a-b)^2\right]^{\frac{1}{4}}$ f) $\lg\,(2a \cdot b)$

Grundlagen: Gleichungen, Ungleichungen mit einer Variablen

1.8-1 Aufgabe
Bestimmen Sie x und führen Sie eine Probe durch:
a) $x - (8x - 69) + (6x - 50) - 2x + (x - 5) = 0$
b) $(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2) = 2(x - 1)^2 - 12$
c) $(2x + 2) - (x + 1) = x + 4$
d) $3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$
e) $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}$
f) $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-7}{x-4}$
g) $\frac{x+9}{x-7} - 3 = \frac{2x-30}{23-x}$

1.8-2 Aufgabe
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung:
a) $2x^2 + 9x - 18 = 0$
b) $5x^4 - 65x^2 + 180 = 0$

1.8-3 Aufgabe
Bestimmen Sie x:
a) $7 + 3\sqrt{2x+4} = 16$
b) $\sqrt{2x+19} + 5 = 0$

1.8-4 Aufgabe
Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital von 100 € bei jährlicher Verzinsung verdoppelt, falls der Zinssatz 4,5 % beträgt?

1.8-5 Aufgabe
Bestimmen Sie x:
a) $2^x = 50$
b) $10^x = 1\,000$

Grundlagen: Gleichungen, Ungleichungen mit einer Variablen

1.8-6 Aufgabe

Die Kosten, die für Werbung in einem Jahr ausgegeben werden können, betragen 24 000 € und sollen proportional zum Umsatz auf drei Zweigstellen verteilt werden.
Wie viel Euro sind den drei Zweigstellen zuzuordnen, wenn die Zweigstelle A 224 800 €, die Zweigstelle B 288 400 € und die Zweigstelle C 168 600 € Umsatz erzielte?

1.8-7 Aufgabe

Ein Bagger benötigt zum Ausheben einer Grube 20 Stunden, ein anderer Bagger mit einer kleineren Schaufel benötigt das Eineinhalbfache an Zeit dafür.
Wie lange dauert das Ausheben der Grube, wenn beide Bagger gleichzeitig arbeiten?

1.8-8 Aufgabe

Ein Gewinn von 9 500 € soll an vier Gesellschafter A, B, C und D folgendermaßen verteilt werden:
B erhält das Doppelte von A, C erhält soviel wie A und B zusammen, D erhält das 1,5-fache von C gemindert um 1 000 €.
Wie viel Euro erhält jeder Gesellschafter?

1.8-9 Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a) $x+2<3$ b) $\frac{1}{x}<1$ c) $(3x-5)(x-2)\le 4(x-2)$

d) $\frac{3x-1}{2x+4}<2$ e) $\frac{x+2}{x-3}\le 4$ f) $\frac{x+52}{x+2}<11$

g) $x^2+4x+3\ge 0$ h) $x^2+2x+2\le 0$ i) $-2x^2+9x-4<0$

1.8-10 Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Betragsungleichungen:

a) $|7-3x|\ge 2$ b) $|x-2|>2$ c) $|x+9|\le 5$

d) $|3x+2|<|x-2|$ e) $\frac{|1+2x|}{1-x}\le 1$ f) $|3x-5|>2\cdot|x+2|$

Grundlagen: Lineare geometrische Zusammenhänge

1.9-1 Aufgabe
Wie lautet die Gleichung der Geraden, die mit der x-Achse zusammenfällt?

1.9-2 Aufgabe
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $P_1(2, 2)$ und $P_2(4, 3)$ verläuft?

1.9-3 Aufgabe
Ermitteln Sie die Achsenabschnittsform der folgenden Geradengleichung:
$2x + 3y = 4$

1.9-4 Aufgabe
Wie lautet die Geradengleichung der Winkelhalbierenden durch den I. und III. Quadranten?

1.9-5 Aufgabe
Welchen Winkel hat das Steigungsdreieck einer Geraden, die eine Steigung von 100 % beschreibt?

1.9-6 Aufgabe
Was bedeutet im Straßenverkehr 5 % Gefälle? Geben Sie den Winkel des Steigungsdreiecks an.

1.9-7 Aufgabe
In einem rechtwinkligen Dreieck mit $a = 2$ und $c = 5$ ist der Winkel α gesucht.

1.9-8 Aufgabe
Berechnen Sie:

a) $\sin 1$	b) $\cos 1$	c) $\tan 1$
d) $\cot 1$	e) $\sin 34°$	f) $\cot 34°$

1.9-9 Aufgabe
Ermitteln Sie x aus der Gleichung $\sin x = 0{,}5$.
Geben Sie die Lösung in Grad und Radiant mit der zugehörigen Periode an.

Grundlagen: Komplexe Zahlen

1.10-1 Aufgabe
Addieren und subtrahieren Sie folgende komplexe Zahlen:
$z_1 = 5 + 5\mathrm{i}$, $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$

1.10-2 Aufgabe
Multiplizieren und dividieren Sie folgende komplexe Zahlen:
$z_1 = 2 + 5\mathrm{i}$, $z_2 = 3 + 7\mathrm{i}$

1.10-3 Aufgabe
Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$, $z_2 = -2 - \mathrm{i}$ und $z_3 = 3\,\mathrm{i}$:

a) $z_1 + z_2 \cdot z_3$

b) $z_1 + z_2 \cdot \dfrac{z_3}{z_1}$

c) ${z_3}^4$

d) $\sqrt{z_1}$

e) $\sqrt[3]{z_1}$

f) $\sqrt[4]{z_1}$

g) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$

Lösungen

1.1-1 $A \cap B = \{1\}$ $\quad A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad A \setminus B = \{3, 5\}$
$B \setminus A = \{7\}$ $\quad \overline{B} = \{3, 5\}$

1.1-2 $I_1 \cap I_2 = (2, 3]$ $\quad I_1 \cup I_2 = [1, 5]$ $\quad I_1 \setminus I_2 = [1, 2]$
$I_2 \setminus I_1 = (3, 5]$ $\quad \overline{I_2} = (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$

1.1-3 a) $A \cap B$ b) $\varnothing$ c) $A \cap B$
d) $A \cap B$ e) $A \cap B$ f) $A \cap B \cap C$

1.1-4 a) $\neq$ b) $=$ c) $=$

1.1-5 a) $4 < x < 7$ b) $-\infty < x < 5$ c) $-3 \le x \le -1$
d) $3 \le x < \infty$ e) $-8 \le x \le 0$ f) $-8 < x < 0$

1.1-6 a) $x \in [-2, 5]$ b) $x \in (-2, 5]$ c) $x \in [4, \infty)$
d) $x \in (5, 7)$ e) $x \in \mathbf{R}$ f) $x \in (-\infty, 8)$

1.1-7
a)

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$
$\{1, 2, c, d\}$	$\{x, y, z\}$	$\{1, 2, c, d, x, y, z\}$	$\varnothing$	$\{1, 2, c, d\}$	B
$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, d\}$	$\{c\}$	$\varnothing$
$\{1, 2, d, e\}$	$\{1, e, m, r, s\}$	$\{1, 2, d, e, m, r, s\}$	$\{1, e\}$	$\{2, d\}$	$\{m, r, s\}$
$\{2, 4, 6, \ldots\}$	$\{1, 3, 5, \ldots\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$	$\varnothing$	A	B

b)

I_1	I_2	$I_1 \cup I_2$	$I_1 \cap I_2$	$I_1 \setminus I_2$	$I_2 \setminus I_1$
$(-3, 8]$	$(-\infty, 2)$	$(-\infty, 8]$	$(-3, 2)$	$[2, 8]$	$(-\infty, -3]$
$(-\infty, 6)$	$[0, \infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, 6)$	$(-\infty, 0)$	$[6, \infty)$
$[4, 8]$	$[2, 4]$	$[2, 8]$	$\{4\}$	$(4, 8]$	$[2, 4)$
$[8, 9]$	$(0, 5]$	$(0, 5] \cup [8, 9]$	$\varnothing$	I_1	I_2

Kapitel 1	Abschnitt 1.2		Aufgaben ◄	

Lösungen

1.2-1

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	W

1.2-2

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
W	W	F	F	W	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W	W	W
F	F	W	W	F	W	W	W

1.2-3

p	q	r	$q \wedge r$	$u = p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$v = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$u \leftrightarrow v$
W	W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	F	F	W	F	F	W
F	F	W	F	F	F	W	F	W
F	F	F	F	F	F	F	F	W

Lösungen

1.4-1 a) 5	b) 1,25	c) 101
1.4-2 a) 1 111 101	b) 1,01	c) 0,001
1.4-3 a) 14	b) 175	c) 30 324
1.4-4 a) C	b) 7D	c) 3 0D4

Lösungen

1.5-1 a) $\sum_{i=1}^{2} 1 = \sum_{k=0}^{1} 1 = \sum_{m=7}^{8} 1 = \sum_{n=-4}^{-3} 1 = 2$

b) $\sum_{k=2}^{5} k = 14$

c) $\prod_{i=1}^{4} 2i = 384$

1.5-2 a) $8 + 10 + 12 + 15 = 45$ b) 441 c) $\frac{440}{3}$

d) $2^{12} = 4\,096$ e) $2^{81} = 2{,}4 \cdot 10^{24}$ f) $ac + ad + bc + bd$

g) $a^2 + 2ab + b^2$ 1. Binomische Formel

h) $a^2 - 2ab + b^2$ 2. Binomische Formel

i) $a^2 - b^2$ 3. Binomische Formel

j) $\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

k) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

l) $a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

1.5-3 a) 55 b) $7a$ c) 66

d) $7a$ e) 2^n f) $n!$

g) $2\frac{1}{12}$ h) 2^m i) 97 200

1.5-4 a) $1{,}22ax + 0{,}37ay - 0{,}52az$

b) $-a^2u^2 + 1{,}5a^5 - 0{,}5a^2w^2r$

c) $10abx^2 - 8a^2x^2y^2 - 15ab^2y + 12a^2by^3$

1.5-5 $2x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

1.5-6 a) $2a(1 + 8b)$ b) $(3x - 2y)(a + b - c)$ c) $7ax(a - 3x + 7ax)$

1.5-7 a) $9ab - 30b^2 + 6bc$ b) $-16x - 6y - 29z$

Lösungen

1.5-8 a) $(x+2)^2$ b) $(x-2y)^2$ c) $(2u+3v)(2u-3v)$

1.5-9 a) $\frac{7a}{36}$ b) $\frac{b-a+1}{(b-a)^2}$ c) $\frac{1}{1-x^2}$

1.5-10 a) $U_i = \sum_{j=1}^{3} u_{ij}\,,\quad i = 1, 2, ..., 12$

b) $U_j = \sum_{i=1}^{12} u_{ij}\,,\quad j = 1, 2, 3$

c) $U = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{3} u_{ij}$

Lösungen

1.6-1 $P_8 = 8! = 40\,320$

1.6-2 $P_4 = 4! = 24$

1.6-3 $K_{W_{49}}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$

1.6-4 $\binom{43}{3} \cdot \binom{6}{3} = 246\,820$

1.6-5 c a e d f b

1.6-6 a) A: $V_{W_{10}}^{(6)} = 10^6 = 1\,000\,000$

b) B: $V_{W_{10}}^{(3)} = 10^3 = 1\,000$

1 000 Versuche pro Schloss, also bei B max. 2 000; bei A maximal 1 000 000 Versuche.
Die Koffer vom Typ B sind nicht sicherer, die Koffer vom Typ A sind wesentlich sicherer.

1.6-7 $K_{32}^{(10)} \cdot K_{22}^{(10)} \cdot K_{12}^{(10)} \cdot K_{2}^{(2)} = \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{2}{2} = \frac{32!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 2!} = 2\,753\,294\,408\,504\,640$

1.6-8 $7 \cdot P_7 = 7 \cdot 7! = 35\,280$

Hinweis: Es gibt 7! verschiedene Sitzanordnungen (Permutationen ohne Wiederholung), für jede wären 7 Gläser Bier nötig.

1.6-9 504 Möglichkeiten

Lösungsweg

Kapitel 1	Abschnitt 1.6		Aufgaben ◄	

1.6-9 Lösungsweg

a) Beginnt man mit dem „D" im Zentrum und geht dann in eines der vier Viertel, bleibt man in diesem Viertel:
Faktor 4

b) Innerhalb eines Viertels addiert sich die Anzahl der Möglichkeiten wie im PASCALschen Dreieck.
Das Ziel „S" liegt in der Zeile für $n = 9$ an der Position für $k = 5$, $\binom{n}{k} = \binom{9}{5} = 126$:
Faktor 126 (Kombinationen ohne Wiederholung)

c) Das Produkt ergibt:
$4 \cdot \binom{9}{5} = 4 \cdot 126 = 504$

Hinweis: Dreht man die folgende Tabelle um 45° in Uhrzeigerrichtung, erkennt man das PASCALsche Dreieck mit der Spitze im Buchstaben „D".

D : $1 = \binom{0}{0}$	**E** : $1 = \binom{1}{1}$	**O** : $1 = \binom{2}{2}$	**G** : $1 = \binom{3}{3}$	**R** : $1 = \binom{4}{4}$	**A** : $1 = \binom{5}{5}$
E : $1 = \binom{1}{0}$	**O** : $2 = \binom{2}{1}$	**G** : $3 = \binom{3}{2}$	**R** : $4 = \binom{4}{3}$	**A** : $5 = \binom{5}{4}$	**C** : $6 = \binom{6}{5}$
O : $1 = \binom{2}{0}$	**G** : $3 = \binom{3}{1}$	**R** : $6 = \binom{4}{2}$	**A** : $10 = \binom{5}{3}$	**C** : $15 = \binom{6}{4}$	**I** : $21 = \binom{7}{5}$
G : $1 = \binom{3}{0}$	**R** : $4 = \binom{4}{1}$	**A** : $10 = \binom{5}{2}$	**C** : $20 = \binom{6}{3}$	**I** : $35 = \binom{7}{4}$	**A** : $56 = \binom{8}{5}$
R : $1 = \binom{4}{0}$	**A** : $5 = \binom{5}{1}$	**C** : $15 = \binom{6}{2}$	**I** : $35 = \binom{7}{3}$	**A** : $70 = \binom{8}{4}$	**S** : $126 = \binom{9}{5}$

Als Lösung ergeben sich $4 \cdot \binom{9}{5} = 4 \cdot 126 = 504$ Möglichkeiten.

Kapitel 1	Abschnitt 1.7		Aufgaben ◄	

Lösungen

1.7-1 a) a^9 b) $2\sqrt{a}$ c) a
d) $\sqrt{a^2+b^2}$ e) $u-1$

1.7-2 a) $\dfrac{\sqrt{2r}}{2\sqrt{c\cdot l\cdot T}}$ b) $\dfrac{1}{2}$

1.7-3 a) $=$ b) $\neq$ c) $=$

1.7-4 a) 25 b) 4 c) 2

1.7-5 a) $2\lg x$ b) $2(\ln x+\ln y)$ c) $\lg(x^2+y^2)$
d) $\dfrac{1}{2}\ln(a^2+b^2)$ e) $\dfrac{1}{2}\ln(a-b)$ f) $\lg 2+\lg a+\lg b$

Kapitel 1	Abschnitt 1.8		Aufgaben ◄	

Lösungen

1.8-1 a) $x = 7$ b) $x = 3$ c) $\emptyset$

d) $x = 1$ e) $x = 18$ f) $x = \frac{13}{4}$

g) $x = 15$

1.8-2 a) $x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -6$ b) $x_{1/2} = \pm 3, \quad x_{3/4} = \pm 2$

1.8-3 a) $x = \frac{5}{2}$ b) $\emptyset$

1.8-4 $n = 15{,}747$

1.8-5 a) $x = \frac{\ln 50}{\ln 2} = 5{,}644$ b) $x = 3$

Lösungen

1.8-6 A: 7 913,17; B: 10 151,95; C: 5 934,88

1.8-7 12 Stunden

1.8-8 A: 1 000 €, B: 2 000 €, C: 3 000 €, D: 3 500 €

1.8-9 a) $x < 1$
b) $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Lösungsweg
c) $2 \le x \le 3$ Lösungsweg
d) $(-\infty, -9) \cup (-2, \infty)$ Lösungsweg
e) $x \ge \frac{14}{3}$ und $x < 3$
f) $x > 3$ und $x < -2$
g) $x \ge -1$ und $x \le -3$
h) keine Lösung
i) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty)$ Lösungsweg

1.8-10 a) $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup [3, \infty)$ Lösungsweg
b) $x > 4$ und $x < 0$
c) $-14 \le x \le -4$
d) $-2 < x < 0$
e) $[-2, 0] \cup (1, \infty)$ Lösungsweg
f) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (9, \infty)$ Lösungsweg

1.8-9 b) Lösungsweg

$\frac{1}{x} < 1 \quad x \neq 0$

1. Fall: $x > 0$ $V_1 = (0, \infty)$	2. Fall: $x < 0$ $V_2 = (-\infty, 0)$
Ungl.: $\frac{1}{x} < 1 \quad \vert \cdot (x > 0)$ $1 < x$ $x > 1$ $E_1 = (1, \infty)$ $L_1 = V_1 \cap E_1 = (1, \infty)$ $L_1 : x > 1$	Ungl.: $\frac{1}{x} < 1 \quad \vert \cdot (x < 0)$ $1 > x$ $x < 1$ $E_2 = (-\infty, 1)$ $L_2 = V_2 \cap E_2 = (-\infty, 0)$ $L_2 : x < 0$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) = \mathbf{R} \setminus [0, 1]$$

1.8-9 c) Lösungsweg
$(3x-5)(x-2) \le 4(x-2)$

1. Fall: $x = 2$:
$V_1 = \{2\}$
Einsetzen in der Ungleichung: $1 \cdot 0 \le 4 \cdot 0$
$0 \le 0$ ✓
$L_1 = \{2\}$
$L_1 : x = 2$

2. Fall: $x - 2 > 0$
$x > 2$
$V_2 = (2, \infty)$
Ungl.: $(3x-5)(x-2) \le 4(x-2) \quad \big| : (x-2) > 0$
$3x - 5 \le 4$
$3x \le 9$
$x \le 3$
$E_2 = (-\infty, 3]$
$L_2 = V_2 \cap E_2 = (2, \infty) \cap (-\infty, 3] = (2, 3]$
$L_2 : x \in (2, 3]$

3. Fall: $x - 2 < 0$
$x < 2$
$V_3 = (-\infty, 2)$
Ungl.: $(3x-5)(x-2) \le 4(x-2) \quad \big| : (x-2) < 0$
$3x - 5 \ge 4$
$3x \ge 9$
$x \ge 3$
$E_3 = [3, \infty)$
$L_3 = V_3 \cap E_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \emptyset$
$L_3 : \emptyset$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [2; 3]$ oder $2 \le x \le 3$

1.8-9 d) Lösungsweg

$$\frac{3x-1}{2x+4} < 2 \;, \quad x \neq -2$$

1. Fall: $2x+4>0$, $x>-2$	2. Fall: $2x+4<0$, $x<-2$
Ungl.: $\frac{3x-1}{2x+4} < 2 \;\Big|\cdot(x>-2)$	Ungl.: $\frac{3x-1}{2x+4} < 2 \;\Big|\cdot(x<-2)$
$3x-1 < 2(2x+4)$	$3x-1 > 4x+8$
$-9 < x$	$-9 > x$
$x > -9$	$x < -9$
$L_1 : x > -2$	$L_2 : x < -9$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9) \cup (-2, \infty) = \mathbf{R} \setminus [-9, -2]$$

1.8-9 i) Lösungsweg

$-2x^2 + 9x - 4 < 0 \quad \Big| :(-2)$

$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0$

$x_{1/2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81-32}{16}} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{9}{4} \pm \frac{7}{4}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

also $(x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0$

1. Fall: $x - 4 > 0$ und $x - 1/2 > 0$

$x > 4$ und $x > 1/2$, also: $x > 4$, $L_1 = V_1 \cap E_1 = (4, \infty)$

2. Fall: $x - 4 < 0$ und $x - 1/2 < 0$

$x < 4$ und $x < 1/2$, also: $x < 1/2$, $L_2 = V_2 \cap E_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty) = \mathbf{R} \setminus \left[\frac{1}{2}, 4\right]$$

Kapitel 1	Abschnitt 1.8		Aufgaben ◄	

1.8-10 a) Lösungsweg

$|7-3x| \geq 2$

1. Fall: $7-3x \geq 0$, $x \leq \frac{7}{3}$	2. Fall: $7-3x < 0$, $x > \frac{7}{3}$
Ungl.: $(7-3x) \geq 2$ $5 \geq 3x$ $x \leq \frac{5}{3}$	Ungl.: $-(7-3x) \geq 2$ $3x \geq 9$ $x \geq 3$
$L_1 = V_1 \cap E_1 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$	$L_2 = V_2 \cap E_2 = [3, \infty)$
$L_1 : x \leq \frac{5}{3}$	$L_2 : x \geq 3$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup [3,\infty) = \mathbf{R} \setminus \left(\frac{5}{3}, 3\right)$$

Kapitel 1	Abschnitt 1.8		Aufgaben ◄	

1.8-10 e) Lösungsweg

$$\frac{|1+2x|}{1-x} \le 1\,, \quad x \ne 1$$

1. Fall: $1-x>0$, $x<1$ Ungl.: $\lvert 1+2x\rvert \le 1-x$		2. Fall: $1-x<0$, $x>1$ Ungl.: $\lvert 1+2x\rvert \ge 1-x$	
1.1: $1+2x\ge 0$ $x \ge -\frac{1}{2}$ Also: $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right)$	1.2: $1+2x<0$ $x<-\frac{1}{2}$ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	2.1: $1+2x\ge 0$ $x \ge -\frac{1}{2}$ $x \in (1, \infty)$	2.2: $1+2x<0$ $x<-\frac{1}{2}$ $\varnothing$
$1+2x \le 1-x$ $3x \le 0$ $x \le 0$ $L_1 = V_1 \cap E_1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ $L_1:\ -\frac{1}{2} \le x \le 0$	$-(1+2x) \le 1-x$ $-2 \le x$ $x \ge -2$ $L_1 = \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$ $L_2:\ -2 \le x < -\frac{1}{2}$	$1+2x \ge 1-x$ $3x \ge 0$ $x \ge 0$ $L_3 = (1, \infty)$ $L_3:\ 1<x<\infty$	

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2, 0] \cup (1, \infty)$$

1.8-10 f) Lösungsweg

$|3x-5| > 2 \cdot |x+2|$

1. Fall: $3x-5 \geq 0$ und $x+2 \geq 0$

$x \geq \frac{5}{3}$ und $x \geq -2$

Also: $x \geq \frac{5}{3}$

Ungl.: $3x-5 > 2(x+2) = 2x+4$

$x > 9$

$L_1 = (9, \infty)$

2. Fall: $3x-5 < 0$ und $x+2 \geq 0$

$x < \frac{5}{3}$ und $x \geq -2$

Also: $-2 \leq x < \frac{5}{3}$

Ungl.: $-(3x-5) > 2x+4$

$-5x > -1$

$x < \frac{1}{5}$

$L_2 = \left[-2, \frac{1}{5}\right)$

3. Fall: $x \geq \frac{5}{3}$ und $x < -2$, Widerspruch!

4. Fall: $3x-5 < 0$ und $x+2 < 0$

$x < \frac{5}{3}$ und $x < -2$

Also: $-\infty < x < -2$

Ungl.: $-(3x-5) > -(2x+4)$

$-x > -9$

$x < 9$

$L_3 = (-\infty, -2)$

Hinweis: Man beachte immer die Voraussetzung des Falles!

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (9, \infty) = \mathbf{R} \setminus \left[\frac{1}{5}, 9\right]$$

Lösungen

1.9-1 $y = 0x + 0 = 0$

1.9-2 $y = \frac{1}{2}x + 1$ oder $-x + 2y = 2$

1.9-3 $\frac{x}{2} + \frac{y}{\frac{4}{3}} = 1$, also $a = 2,\ b = \frac{4}{3}$

1.9-4 $y = x$

1.9-5 $\tan\beta = \frac{100}{100}$, also $\beta = 45°$

1.9-6 $\tan\delta = \frac{5}{100}$, also $\delta = 2{,}86°$

1.9-7 $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, also $\alpha = 23{,}578°$

1.9-8 a) 0,841 b) 0,540 c) 1,557
d) 0,642 e) 0,559 f) 1,482

1.9-9 $x_1 = 30° \pm k \cdot 360°$, $x_2 = 150° \pm k \cdot 360°$ mit $k \in \mathbf{N}$
$x_1 = 0{,}523 \pm k \cdot 2\pi$, $x_2 = 2{,}618 \pm k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbf{N}$

Lösungen

1.10-1 $z_1 + z_2 = 8 + 7\mathrm{i}$ $\quad z_1 - z_2 = 2 + 3\mathrm{i}$ Lösungsweg

1.10-2 $z_1 \cdot z_2 = -29 + 29\mathrm{i}$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{41}{58} + \dfrac{1}{58}\mathrm{i}$ Lösungsweg

1.10-3 a) $z_1 + z_2 \cdot z_3 = 5 - 3\mathrm{i}$ b) $z_1 + z_2 \cdot \dfrac{z_3}{z_1} = \dfrac{14}{13} + \dfrac{18}{13}\mathrm{i}$ c) $z_3{}^4 = 81$

d) $\sqrt{z_1}_1 = 1{,}674 + 0{,}896\,\mathrm{i}$, $\sqrt{z_1}_2 = -1{,}674 - 0{,}896\,\mathrm{i}$ Lösungsweg

e) $\sqrt[3]{z_1}_1 = 1{,}452 + 0{,}493\,\mathrm{i}$, $\sqrt[3]{z_1}_2 = -1{,}153 + 1{,}011\,\mathrm{i}$, $\sqrt[3]{z_1}_3 = -0{,}299 + 1{,}504\,\mathrm{i}$

f) $\sqrt[4]{z_1}_1 = 1{,}337 + 0{,}335\,\mathrm{i}$, $\sqrt[4]{z_1}_2 = -0{,}335 + 1{,}337\,\mathrm{i}$, $\sqrt[4]{z_1}_3 = -1{,}337 - 0{,}335\,\mathrm{i}$,

$\sqrt[4]{z_1}_4 = 0{,}335 - 1{,}337\,\mathrm{i}$

g) $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}_1 = \mathrm{i}$, $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}_2 = -0{,}866 - 0{,}5\,\mathrm{i}$, $\sqrt[3]{-\mathrm{i}}_3 = 0{,}866 - 0{,}5\,\mathrm{i}$

1.10-1 Lösungsweg

$(3 + 2i) + (5 + 5i) = (3 + 5) + (2 + 5)\, i \;=\; 8 + 7i$

$(5 + 5i) - (3 + 2i) = (5 - 3) + (5 - 2)\, i \;=\; 2 + 3i$

1.10-2 Lösungsweg

$$(2+5i)\cdot(3+7i) = (2\cdot 3 - 5\cdot 7) + (2\cdot 7 + 5\cdot 3)i = -29 + 29i$$

$$\frac{(2+5i)}{(3+7i)} = \frac{(2+5i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{6-14i+15i-35i^2}{9+21i-21i-49i^2} = \frac{41+i}{9+49} = \frac{41+i}{58}$$

1.10-3 d) Lösungsweg

$$\sqrt{z_1}_{\,1} = \sqrt{2+3i} = \sqrt[4]{13}\left(\cos\frac{56{,}3°}{2} + i\sin 28{,}15°\right) = 1{,}674 + 0{,}896\, i$$

$$\sqrt{z_1}_{\,2} = \sqrt{2+3i} = \sqrt[4]{13}\left(\cos(\frac{56{,}3°}{2} + 180°) + i\sin 208{,}15°\right) = -1{,}674 - 0{,}896\, i$$

Lineare Algebra und Optimierung: Determinanten

2.1-1 Aufgabe
Lösen Sie mit Hilfe der CRAMERschen Regel die folgenden Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 12x_1 - 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 13 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

2.1-2 Aufgabe
Berechnen Sie die folgende Determinante sowohl mit der SARRUSschen Regel, als auch mit dem LAPLACEschen Entwicklungssatz:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

2.1-3 Aufgabe
Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$E = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

2.1-4 Aufgabe
Lösen Sie mit Hilfe der CRAMERschen Regel folgende Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 - x_3 &= 19 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 27 \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 10x_1 + 6x_2 - x_3 &= 19 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 27 \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_3 + 2x_1 &= 5 \end{aligned}$$

2.1-5 Aufgabe
Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$G = \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & x_2 \\ x_1 & 1 & -x_3 \\ -x_2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

2.1-6 Aufgabe
Für welche Werte von λ hat die folgende Determinante den Wert 0:

$$H = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 1 & 2 \\ 1 & (2-\lambda) & 2 \\ 2 & 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Determinanten

2.1-7 Aufgabe
Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Reduzieren auf einfachere Determinanten:

$$I = \begin{vmatrix} -0{,}2 & 1{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}5 \end{vmatrix} \qquad K = \begin{vmatrix} 3 & 1{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 1 & 1{,}6 & -1{,}2 & 0{,}5 \\ 4 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ -2 & 0{,}8 & 1{,}4 & 0{,}3 \end{vmatrix}$$

2.1-8 Aufgabe

Gegeben sind die folgenden Vektoren: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbf{R}$

Für welche Werte t sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ linear anhängig und für welche Werte sind sie linear unabhängig?

2.1-9 Aufgabe
Untersuchen Sie folgende Gleichungssysteme auf eindeutige Lösung, lineare Abhängigkeit oder Widerspruch.
Es ist anzugeben:
- im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung;
- im Falle der linearen Abhängigkeit, welche Gleichungen voneinander abhängig sind;
- im Falle des Widerspruchs, welche Gleichungen im Widerspruch zueinander stehen.

a)
$$\begin{aligned} 12x + 36y - 24z &= 77 \\ 19x - 33y - 23z &= 13 \\ 16x + 48y - 32z &= 55 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -2{,}7x + 3{,}6y + 4{,}5z &= 3{,}3 \\ -0{,}3x + 4{,}8y + 7{,}8z &= 1{,}2 \\ 3{,}2x + 1{,}6y + 4{,}4z &= -2{,}8 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -2{,}7x + 3{,}6y + 4{,}5z &= 3{,}3 \\ -0{,}3x + 4{,}8y + 7{,}8z &= 1{,}2 \\ 3{,}2x + 1{,}6y - 4{,}4z &= -2{,}8 \end{aligned}$$

2.1-10 Aufgabe
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe der CRAMERschen Regel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= a \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= b \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 &= c \end{aligned}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Matrizen

2.2-1 Aufgabe
Berechen Sie $\boldsymbol{D} = 6 \cdot \boldsymbol{A} - 2 \cdot \boldsymbol{B} + 4 \cdot \boldsymbol{C}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2-2 Aufgabe
Berechnen Sie $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2 \cdot \boldsymbol{M}_3$ mit

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Machen sie alle möglichen Proben.

2.2-3 Aufgabe
Bilden Sie $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.2-4 Aufgabe
Ermitteln Sie die inversen Matrizen zu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2-5 Aufgabe
Prüfen Sie, ob die folgenden symmetrischen Matrizen positiv definit sind und geben Sie die quadratischen Formen der Matrizen an:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Siehe zu positiv definiten Matrizen und quadratischen Formen Kapitel 6, Abschnitt 6.5.

Lineare Algebra und Optimierung: Matrizen

2.2-6 Aufgabe

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen vier Zwischenprodukte her, aus denen dann drei Endprodukte gefertigt werden. Der Materialeinsatz ist den folgenden Tabellen zu entnehmen:

	H_1	H_2	H_3	H_4
R_1	1	2	1	0
R_2	1	0	4	2
R_3	3	1	1	0

	E_1	E_2	E_3
H_1	2	0	1
H_2	1	1	2
H_3	0	3	1
H_4	1	0	4

a) Wie lautet die Matrix $\boldsymbol{G}$ für den Gesamtverbrauch der Rohstoffe?

b) Wie viel Rohstoffe sind nötig, damit
50 ME von E_1,
200 ME von E_2 und
100 ME von E_3 hergestellt werden können?

2.2-7 Aufgabe

Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren zu folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Gleichungssysteme

2.3-1 Aufgabe
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12 \end{aligned}$$

2.3-2 Aufgabe
Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= a \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= b \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 &= c \end{aligned}$$

2.3-3 Aufgabe
Anna ist dreimal so alt wie Hanna war, als Anna doppelt so alt war wie Hanna heute ist. Hanna ist 20 Jahre jünger als Anna. Wie alt sind Anna und Hanna?

2.3-4 Aufgabe
Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

2.3-5 Aufgabe
Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2.3-6 Aufgabe
Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

2.3-7 Aufgabe
Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit Hilfe der Basistransformation:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Gleichungssysteme

2.3-8 Aufgabe
Für die Herstellung zweier Erzeugnisse, die beide aus den Rohstoffen R_1 und R_2 hergestellt werden können, stehen 3 600 Einheiten vom ersten Rohstoff und 2 450 Einheiten vom zweiten Rohstoff zur Verfügung. Für das erste Erzeugnis werden 40 Einheiten des ersten und 50 Einheiten des zweiten Rohstoffes benötigt, für das zweite Erzeugnis 65 Einheiten des ersten Rohstoffes und 30 Einheiten des zweiten. Wie viele Einheiten dieser zwei Erzeugnisse sind herzustellen, wenn die vorhandenen Rohstoffe voll verbraucht werden sollen?

2.3-9 Aufgabe
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden homogenen Gleichungssysteme.
Gibt es nichtnegative ganzzahlige Lösungen?
a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

2.3-10 Aufgabe
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems.
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2.3-11
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Gleichungssystems und geben Sie sie in Vektorform an.
Ermitteln Sie mindestens eine ganzzahlige Lösung, die keine negativen Komponenten enthält.
a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 16x_4 + 6x_5 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 7 \\ 4x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 8x_4 + 10x_5 &= 6 \end{aligned}$$
b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_4 + 2x_5 &= 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 &= 7 \end{aligned}$$
c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 - 2x_6 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 + 2x_6 &= 18 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_4 + 6x_5 &= 10 \end{aligned}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Gleichungssysteme

2.3-12 Aufgabe

Es sollen 30 Personen mit je einem Buch ausgezeichnet werden. Es stehen 600 € zum Kauf von Büchern im Wert von 18 €, 24 € und 30 € zur Verfügung.
Welche Möglichkeiten für den Kauf dieser 30 Bücher gibt es, wenn genau 600 € ausgegeben werden sollen?

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf.
b) Welche Aussage über den zu erwartenden Freiheitsgrad f können Sie treffen?
c) Lösen Sie das Gleichungssystem, und geben Sie die allgemeine Lösung an.
d) Geben Sie alle sinnvollen Lösungen an.

2.3-13 Aufgabe

Es ist s so zu bestimmen, dass die Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist, und die Lösung ist dann anzugeben:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= s \end{aligned}$$

2.3-14 Aufgabe

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 24 \\ x_2 + 2x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 28 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrizenform.
b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der inversen Matrix der Koeffizientenmatrix.

2.3-15 Aufgabe

Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Machen Sie die Probe durch eine der folgenden Matrizenmultiplikationen: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

2.3-16 Aufgabe

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 11 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + 4x_5 &= 2 \\ 6x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 24 \end{aligned}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Matrizengleichungen

2.4-1 Aufgabe
Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{X}$ aus den folgenden Matrizengleichungen:

a) $\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

b) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{XA} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{XB}$

2.4-2 Aufgabe
Ermitteln Sie den Vektor $\boldsymbol{x}$ aus der folgenden Matrizengleichung:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Ab} - w\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = (9, 21), \quad w = -2$$

2.4-3 Aufgabe
Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{X}$ aus der folgenden Matrizengleichung:

$$\boldsymbol{AX} + 2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{BX}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -2 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Ungleichungssysteme

2.5-1 Aufgabe

Gegeben ist das folgende Ungleichungssystem:

$$-x_1 + x_2 \le 2 \qquad x_1 \ge 0$$
$$2x_1 + x_2 \le 4 \qquad x_2 \ge 0$$

Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch alle Punkte $P(x_1, x_2)$ die alle Ungleichungen erfüllen.

2.5-2 Aufgabe

Auf 3 Maschinen werden verschiedene Erzeugnisse bearbeitet. Für zwei Erzeugnissen E_1 und E_2 ist ihre Bearbeitung auf zwei bzw. drei Maschinen erforderlich.

Maschine	Maschinenzeit je Erzeugnis (Std./Stck.)		Maschinenzeitfonds (Std.)
	E_1	E_2	
1	3	3	300
2	2	4	320
3	0	4	280

a) Ermitteln Sie grafisch und rechnerisch alle Lösungsvarianten, so dass die Maschinenzeitfonds nicht überschritten werden.

b) Bei welcher Lösungsvariante ist die Summe der hergestellten Erzeugnisse am größten?

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Optimierung

2.6-1 Aufgabe
Ein Sekthändler kauft von einem Großhändler trockenen und halbtrockenen Sekt. Dabei muss er Mindestabnahmemengen, die maximale Lagerkapazität sowie den Einkaufspreis beachten. Der Anteil von halbtrockenem Sekt an der Gesamteinkaufsmenge soll höchstens 40 % betragen.

	trockener Sekt	halbtrockener Sekt
Mindestabnahmemenge in l	3 000	1 000
Max. Lagerkapazität in l	6 000	5 000
Gewinn je l in €	2	1,5

Wie viel Liter soll der Sekthändler von jeder Sorte bestellen, damit der Gewinn maximal wird? Erstellen Sie ein mathematisches Modell und lösen Sie die Aufgabe nach der Modellierung grafisch und rechnerisch. Geben Sie die Einkaufsmengen und den erzielten Gewinn an.

2.6-2 Aufgabe
Es ist das folgende lineare Optimierungsproblem grafisch und rechnerisch zu lösen:

$$Z = 5x_1 + 10x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 25 \\ x_1 + x_2 &\le 20 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 75 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.6-3 Aufgabe
Es ist das folgende LOP mit drei unterschiedlichen Zielfunktionen zu lösen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= x_1 + 3x_2 + 6 \to \max \\ Z_2 &= x_1 + 2x_2 + 6 \to \max \\ Z_3 &= -x_1 - 3x_2 + 6 \to \max \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge -4 \\ x_1 + 2x_2 &\le 11 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 &\le 4 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0$$
x_2 beliebig

2.6-4 Aufgabe
Ein Unternehmen produziert drei verschiedene Geräte. Beim Kauf dieser Geräte erzielt der Unternehmer für das Gerät G_1 30 GE, für das Gerät G_2 20 GE und für das Gerät G_3 50 GE Gewinn.
In der Produktionsstätte können höchstens 60 Geräte hergestellt werden. Außerdem muss gesichert sein, dass mindestens 30 Geräte vom Typ G_1 sowie von den Typen G_1 und G_2 zusammen mindestens 40 Geräte hergestellt werden.
Wie ist zu produzieren, damit ein größtmöglicher Gewinn erzielt wird? Wie groß ist der Gewinn?

Lineare Algebra und Optimierung: Lineare Optimierung

2.6-5 Aufgabe
Die folgende LO-Aufgabe ist grafisch und rechnerisch zu lösen:

ZF: $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

NB:
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ 4x_1 + 2x_2 &\le -1 \\ -2x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

NNB: x_1 beliebig
$x_2 \ge 0$

a) Markieren Sie bei der grafischen Lösung insbesondere den zulässigen Lösungsbereich B, die Zielfunktion $Z_{\max}$ und die Lösung $\boldsymbol{x}_{\text{opt}}$. Geben Sie $Z_{\max}$ und $\boldsymbol{x}_{\text{opt}}$ an.
b) Führen Sie die rechnerische Lösung mit dem Simplexalgorithmus durch und geben Sie die 1. Normalform an. Geben Sie für jedes Rechenschema die zugehörige Lösung an.
Geben Sie für die vollständige Lösung $Z_{\max}(x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{x}_{\text{opt}}$ an.

2.6-6 Aufgabe
Lösen Sie folgende LOP grafisch und rechnerisch:

a)
$$\begin{aligned} Z = -2x_1 + 4x_2 &\to \min \\ 2x_1 + 3x_2 &\le -1 \\ x_1 - x_2 &\le 2 \\ -6x_1 + 2x_2 &= -4 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ \text{beliebig} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} Z = 10x_1 + 8x_2 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 &\ge 100 \\ 2x_1 + 4x_2 &\ge 130 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils $Z_{\min}(x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{x}_{\text{opt}}$ an.

2.6-7 Aufgabe
Lösen Sie folgende Optimierungsaufgabe mit dem Simplexverfahren:

$$\begin{aligned} Z = 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\to \min \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 &\le 16 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ -x_1 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3, 4 & \end{aligned}$$

2.6-8 Aufgabe
Es ist das folgende lineare Optimierungsproblem primal und dual zu lösen:

$$\begin{aligned} Z = 40x_1 + 10x_2 + 15x_3 &\to \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\ge 150 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\ge 200 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\le 180 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösungen

2.1-1 a) $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$

b) $D = 0$, CRAMERsche Regel nicht anwendbar, Gleichungssystem nicht lösbar

c) $D = 0$, CRAMERsche Regel nicht anwendbar, ∞ viele Lösungen: $x_1 = t, \quad x_2 = -\frac{2}{3}t + 1$

2.1-2 $D = -5$

2.1-3 $E = -18, \quad F = 0$

2.1-4 a) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

b) $x_1 = -\frac{23}{505} = -0{,}0455; \quad x_2 = \frac{1\,982}{505} = 3{,}9248; \quad x_3 = \frac{2\,067}{505} = 4{,}0931$

c) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

2.1-5 $G = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$

2.1-6 $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 5$

2.1-7 $I = 0{,}214, \quad K = -4{,}497$

2.1-8 lineare Abhängigkeit für $t = \frac{1}{2}$, lineare Unabhängigkeit für $t \neq \frac{1}{2}$ Lösungsweg

2.1-9 a) erste und dritte Gleichung im Widerspruch

b) lineare Abhängigkeit; z. B.: (3. Gleichung) $= -\frac{4}{3}\cdot$ (1. Gleichung) $+\frac{4}{3}\cdot$ (2. Gleichung)

c) $x_1 = -0{,}97; \quad x_2 = 0{,}19; \quad x_3 = 0$

2.1-10 $x_1 = \frac{9a - 23b - 11c}{8}, \quad x_2 = \frac{-a + 7b + 3c}{8}, \quad x_3 = \frac{-7a + 25b + 13c}{8}$

2.1-8 Lösungsweg

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & t \end{vmatrix} = -2+4-1-2t = -2t+1 = 0\,, \quad 2t = 1\,, \quad t = \frac{1}{2}$$

Die drei gegebenen Vektoren sind für $t = \frac{1}{2}$ linear abhängig voneinander.

Für $t \neq \frac{1}{2}$ sind die drei gegebenen Vektoren voneinander linear unabhängig.

Lösungen

2.2-1 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -10 & 28 & -6 \\ 20 & 4 & 6 \\ 46 & 2 & 38 \end{pmatrix}$

2.2-2 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 48 & 18 \\ 42 & 36 \end{pmatrix}$

2.2-3 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 0 \\ 22 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

2.2-4 $\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 10 & -24 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix}$

2.2-5 $A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = 3 > 0 \quad \rightarrow$ positiv definit
$Q_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$

$B_1 = 2 > 0, \quad B_2 = 3 > 0, \quad B_3 = 4 > 0 \quad \rightarrow$ positiv definit
$Q_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

$C_1 = 2 > 0, \quad C_2 = 3 > 0, \quad C_3 = -2 < 0 \quad \rightarrow$ indefinit
$Q_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

Lösungen

2.2-6 a) $\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 12 & 13 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $r = \begin{pmatrix} 1\,800 \\ 3\,900 \\ 1\,750 \end{pmatrix}$

2.2-7

A:

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

B:

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{17}}{17}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

C:

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = t_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{3\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

D:

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = t_3\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{3\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}707 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die „normierten Eigenvektoren“ $\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1. Auch die entgegengesetzten Vektoren $-\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1, sie sind ebenfalls „normierte Eigenvektoren“.

2.2-7 Lösungsweg Zur Lösung von *B* Zur Lösung von *C* Zur Lösung von *D*

A: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Charakteristische Gleichung: $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$

Berechnung der Eigenvektoren für $\lambda_{1/2}$: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\lambda_1 = 3: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

−1	1	0	0
1	−1	0	0
1	−1	0	0
0	0	0	0✓
1	1		
	↑		

$\boldsymbol{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

1	1	0	2
1	1	0	2
1	1	0	2
0	0	0	0✓
−1	1		
	↑		

$\boldsymbol{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2-7 Lösungsweg Zur Lösung von ***A*** Zur Lösung von ***C*** Zur Lösung von ***D***

B: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Charakteristische Gleichung: $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$$

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$

Berechnung der Eigenvektoren für $\lambda_{1/2}$: $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

4	1	0	5
−4	−1	0	−5
4	1	0	5
0	0	0	0 ✓
1	−4		
↑			

$$\boldsymbol{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

1	1	0	2
−4	−4	0	−8
1	1	0	2
0	0	0	0 ✓
−1	1		
	↑		

$$\boldsymbol{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \frac{\sqrt{17}}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Kapitel 2	Abschnitt 2.2		Aufgaben ◄	

2.2-7 Lösungsweg Zur Lösung von ***A*** Zur Lösung von ***B*** Zur Lösung von ***D***

$$\boldsymbol{C}:\ \left(\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&2-\lambda&1\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(1-\lambda)(2-\lambda)^2+4+4-4(2-\lambda)-(1-\lambda)=0$

$-\lambda^3+5\lambda^2+\lambda-5=0$

$\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+5=0$ $\quad\lambda_1=1,$ **Hinweis**: Polynomdivision!

$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-5)=0$ $\quad\lambda_2=5,\ \lambda_3=-1$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1=1$:

0	2	2	0	4
2	1	1	0	4
2	1	1	0	4
–4	0	0	0	–4✓
2	1	1	0	4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1✓
0	1	1	0	2✓
0	0	0	0	0✓
0	–1	1		
		↑		

$\lambda_2=5$:

–4	2	2	0	0
2	–3	1	0	0
2	1	–3	0	0
–8	8	0	0	0✓
2	–3	1	0	0
8	–8	0	0	0✓
–1	1	0	0	0✓
–1	0	1	0	0✓
0	0	0	0	0✓
1	1	1		
↑				

$\lambda_3=-1$:

2	2	2	0	6
2	3	1	0	6
2	1	3	0	6
–2	–4	0	0	–6✓
2	3	1	0	6
–4	–8	0	0	–12✓
1	2	0	0	3✓
0	–1	1	0	0✓
0	0	0	0	0✓
–2	1	1		
	↑			

$\boldsymbol{x}_1=t_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_2=t_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_3=t_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_{3\mathrm{N}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

Hinweis: Die „normierten Eigenvektoren“ $\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1. Auch die entgegengesetzten Vektoren $-\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1, sie sind ebenfalls „normierte Eigenvektoren“.

2.2-7 Lösungsweg Zur Lösung von ***A*** Zur Lösung von ***B*** Zur Lösung von ***C***

Aufgabe 2.23 (2) aus dem Taschenbuch:

$$\boldsymbol{D}: \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)^2 - (2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4 = 0 \qquad \lambda_1 = 2\,,$ **Hinweis**: Polynomdivision!

$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0 \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{2}\,, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2$

0	1	0	0	1
1	0	1	0	2
0	1	0	0	1
0	1	0	0	1✓
1	0	1	0	2
0	1	0	0	1✓
0	1	0	0	1
1	0	1	0	2✓
0	0	0	0	0✓
−1	0	1		
		↑		

$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

$-\sqrt{2}$	1	0	0	$1-\sqrt{2}$
1	$-\sqrt{2}$	1	0	$1-\sqrt{2}$
0	1	$-\sqrt{2}$	0	$1-\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$	1	0	0	$1-\sqrt{2}$
−1	0	1	0	0✓
$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	0✓
0	1	$-\sqrt{2}$	0	$1-\sqrt{2}$ ✓
1	0	−1	0	0✓
0	0	0	0	0✓
1	$\sqrt{2}$	1		
		↑		

$\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$

$\sqrt{2}$	1	0	0	$1+\sqrt{2}$
1	$\sqrt{2}$	1	0	$2+\sqrt{2}$
0	1	$\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$
$\sqrt{2}$	1	0	0	$1+\sqrt{2}$
−1	0	1	0	0✓
$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	0✓
0	1	$\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$ ✓
1	0	−1	0	0✓
0	0	0	0	0✓
1	$-\sqrt{2}$	1		
		↑		

$\boldsymbol{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{2\mathrm{N}} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_{3\mathrm{N}} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}707 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die „normierten Eigenvektoren“ $\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1. Auch die entgegengesetzten Vektoren $-\boldsymbol{x}_\mathrm{N}$ haben die Länge 1, sie sind ebenfalls „normierte Eigenvektoren“.

Lösungen

2.3-1 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.3-2 $x_1 = \dfrac{9a - 23b - 11c}{8}, \quad x_2 = \dfrac{-a + 7b + 3c}{8}, \quad x_3 = \dfrac{-7a + 25b + 13c}{8}$ Lösungsweg

2.3-3 Anna ist 36 und Hanna ist 16 Jahre alt, vor 4 Jahren waren sie 32 und 12. Lösungsweg

2.3-4 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -23 \\ -19 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.3-5 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.3-6 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.3-7 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

Lösungen

2.3-8 $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.3-9

a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ a) Lösungsweg

x_1	0	1	0	0	0	0	
$x_2 = t_1$	0	1	2	4	6	8	…
x_3	0	0	2	4	6	8	
$x_4 = t_2$	0	1	1	2	3	4	…

b) Lösungsweg

2.3-10 $n = m = 3; \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b})$ Lösungsweg
Das Gleichungssystem ist unlösbar! (Widerspruch im Gleichungssystem)

2.3-11

a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R} \qquad \boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

b) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$ Lösungsweg

c) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -\frac{21}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{R}; \qquad \boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

Lösungen

2.3-12

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \\ 18x_1 + 24x_2 + 30x_3 &= 600 \end{aligned}$$

b) $n = 3,\quad m = 2,\quad r = 2;\qquad r \le m,\quad f = n - r \ge n - m = 3 - 2 = 1,\quad f \ge 1;$

$f = n - r = 1$

c) $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\qquad t \in \mathbf{R}$$

d)

x_1	20	21	22	23	24	25
x_2	10	8	6	4	2	0
$x_3 = t$	0	1	2	3	4	5

Lösungsweg

2.3-13 $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

Lösungsweg

Die Lösung gilt nur für $s = -6$.
Für $s \ne -6$ ist das Gleichungssystem unlösbar.

2.3-14

a) $$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ mit } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 11 \\ 28 \end{pmatrix}$$

b) $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

2.3-15 $$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg

Zu 2.3-16

Lösungen Zurück

2.3-16 $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ Lösungsweg

2.3-1 Lösungsweg

	5	3	−2	1	23 ✓	
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	1	1	−1	1	8	10
	2	1	−1	−1	3	4
	1	2	1	−2	0	2
	1	−1	−1	3	12	14
x_1	1	1	−1	1	8	10
	0	−1	1	−3	−13	−16 ✓
	0	1	2	−3	−8	−8 ✓
	0	−2	0	2	4	4 ✓
x_1	1	0	0	−2	−5	−6 ✓
x_2	0	1	−1	3	13	16 ✓
	0	0	3	−6	−21	−24 ✓
	0	0	−2	8	30	36 ✓
x_1	1	0	0	−2	−5	−6 ✓
x_2	0	1	0	1	6	8 ✓
x_3	0	0	1	−2	−7	−8 ✓
	0	0	0	4	16	20 ✓
x_1	1	0	0	0	3	4 ✓
x_2	0	1	0	0	2	3 ✓
x_3	0	0	1	0	1	2 ✓
x_4	0	0	0	1	4	5 ✓
	3	2	1	4		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.3-2 Lösungsweg

	4	0	4	$a+b+c$ ✓	
BV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	2	3	1	a	$a+6$
	-1	5	-2	b	$b+2$
	3	-8	5	c	c
x_3	2	3	1	a	$a+6$
	3	11	0	$2a+b$	$2a+b+14$ ✓
	-7	-23	0	$-5a+c$	$-5a+c-30$ ✓
x_3	0	$\frac{-13}{3}$	1	$\frac{-a-2b}{3}$	$\frac{-a-2b-10}{3}$ ✓
x_1	1	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{2a+b}{3}$	$\frac{2a+b+14}{3}$ ✓
	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{-a+7b+3c}{3}$	$\frac{-a+7b+3c+8}{3}$ ✓
x_3	0	0	1	$\frac{-7a+25b+13c}{8}$	$\frac{-7a+25b+13c+8}{8}$ ✓
x_1	1	0	0	$\frac{9a-23b-11c}{8}$	$\frac{9a-23b-11c+8}{8}$ ✓
x_2	0	1	0	$\frac{-a+7b+3c}{8}$	$\frac{-a+7b+3c+8}{8}$ ✓

$$x_1 = \frac{9a-23b-11c}{8}, \quad x_2 = \frac{-a+7b+3c}{8}, \quad x_3 = \frac{-7a+25b+13c}{8}$$

2.3-3 Lösungsweg

A - Anna, heute
H - Hanna, heute
a - Anna, früher
h - Hanna, früher

x - „heute" – „früher"

1. Lösungsmöglichkeit

$$\begin{aligned} H+20 &= A \\ h+20 &= a \\ A &= 3\cdot h \\ a &= 2\cdot H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - H &= 20 \\ a - h &= 20 \\ A - 3\cdot h &= 0 \\ 2\cdot H - a &= 0 \end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit

$$\begin{aligned} H+20 &= A \\ A &= 3\cdot(H-x) \\ A - x &= 2\cdot H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - H &= 20 \\ A - 3\cdot H + 3\cdot x &= 0 \\ A - 2\cdot H - x &= 0 \end{aligned}$$

Zum 2. Lösungsweg

	2	1	0	−4	40 ✓		
BV	A	H	a	h	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$	
	1	−1	0	0	20	20	
	0	0	1	−1	20	20	
	1	0	0	−3	0	−2	
	0	2	−1	0	0	1	
A	1	−1	0	0	20	20	
	0	0	1	−1	20	20	✓
	0	1	0	−3	−20	−22	✓
	0	2	−1	0	0	1	✓
A	1	0	0	−3	0	−2	✓
	0	0	1	−1	20	20	✓
H	0	1	0	−3	−20	−22	✓
	0	0	−1	6	40	45	✓
A	1	0	0	−3	0	−2	✓
a	0	0	1	−1	20	20	✓
H	0	1	0	−3	−20	−22	✓
	0	0	0	5	60	65	✓
A	1	0	0	0	36	37	✓
a	0	0	1	0	32	33	✓
H	0	1	0	0	16	17	✓
h	0	0	0	1	12	13	✓
	36	16	32	12			

Anna ist 36 Jahre alt und Hanna ist 16 Jahre alt, vor 4 Jahren waren sie 32 und 12 Jahre alt.

Kapitel 2	Abschnitt 2.3		Aufgaben ◄	

2.3-3 Lösungsweg

2. Lösungsmöglichkeit Zurück zum 1. Lösungsweg

$$\begin{aligned} A - H &= 20 \\ A - 3\cdot H + 3\cdot x &= 0 \\ A - 2\cdot H - x &= 0 \end{aligned}$$

	3	−6	2	20 ✓	
BV	*A*	*H*	*x*	***b***	***s***
	1	−1	0	20	20
	1	−3	3	0	1
	1	−2	−1	0	−2
A	1	−1	0	20	20
	0	−2	3	−20	−19 ✓
	0	−1	−1	−20	−22 ✓
A	1	0	1	40	42 ✓
	0	0	5	20	25 ✓
H	0	1	1	20	22 ✓
A	1	0	0	36	37 ✓
x	0	0	1	4	5 ✓
H	0	1	0	16	17 ✓
	36	16	4		

Anna ist 36 Jahre alt und Hanna ist 16 Jahre alt, vor 4 Jahren waren sie 32 und 12 Jahre alt.

2.3-4 Lösungsweg

	4	– 2	1	11 ✓	
BV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	1	– 1	1	0	1
	2	1	– 2	7	8
	1	– 2	2	4	5
x_1	1	– 1	1	0	1 ✓
	0	3	– 4	7	6 ✓
	0	– 1	1	4	4 ✓
x_1	1	0	0	– 4	– 3 ✓
	0	– 1	0	23	22 ✓
x_3	0	– 1	1	4	4 ✓
x_1	1	0	0	– 4	– 3 ✓
x_2	0	1	0	– 23	– 22 ✓
x_3	0	0	1	– 19	– 18 ✓
	– 4	– 23	– 19		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -23 \\ -19 \end{pmatrix}$$

2.3-5 Lösungsweg

	9	− 1	5	0 ✓	
BV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	3	− 1	1	2	5
	2	2	2	− 4	2
	4	− 2	2	2	6
x_3	3	− 1	1	2	5 ✓
	− 4	4	0	− 8	− 8 ✓
	− 2	0	0	− 2	− 4 ✓
x_3	0	− 1	1	− 1	− 1 ✓
	0	4	0	− 4	0 ✓
x_1	1	0	0	1	2 ✓
x_3	0	0	1	− 2	− 1 ✓
x_2	0	1	0	− 1	0 ✓
x_1	1	0	0	1	2 ✓
	1	− 1	− 2		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.3-6 Lösungsweg

	11	−1	−1	1	4 ✓	
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	1	−2	1	2	−1	1
	2	1	−2	−1	−3	−3
	5	−2	1	1	4	9
	3	2	−1	−1	4	7
x_1	1	−2	1	2	−1	1
	0	5	−4	−5	−1	−5 ✓
	0	8	−4	−9	9	4 ✓
	0	8	−4	−7	7	4 ✓
x_1	1	0	0	1/4	3/4	2 ✓
	0	−3	0	2	−8	−9 ✓
	0	0	0	−2	2	0 ✓
x_3	0	−2	1	7/4	−7/4	−1 ✓
x_1	1	0	0	0	1	2 ✓
	0	−3	0	0	−6	−9 ✓
x_4	0	0	0	1	−1	0 ✓
x_3	0	−2	1	0	0	−1 ✓
x_1	1	0	0	0	1	2 ✓
x_2	0	1	0	0	2	3 ✓
x_4	0	0	0	1	−1	0 ✓
x_3	0	0	1	0	4	5 ✓
	1	2	4	−1		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.3-7 Lösungsweg

	5	14	21	26	29	15 ✓		
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$	
	1	2	2	2	2	1	10	
	1	3	4	4	4	2	18	
	1	3	5	6	6	3	24	
	1	3	5	7	8	4	28	
	1	3	5	7	9	5	30	
x_1	1	2	2	2	2	1	10	
	0	1	2	2	2	1	8	✓
	0	1	3	4	4	2	14	✓
	0	1	3	5	6	3	18	✓
	0	1	3	5	7	4	20	✓
x_1	1	0	−2	−2	−2	−1	−6	✓
x_2	0	1	2	2	2	1	8	
	0	0	1	2	2	1	6	✓
	0	0	1	3	4	2	10	✓
	0	0	1	3	5	3	12	✓
x_1	1	0	0	2	2	1	6	✓
x_2	0	1	0	−2	−2	−1	−4	✓
x_3	0	0	1	2	2	1	6	
	0	0	0	1	2	1	4	✓
	0	0	0	1	3	2	6	✓
x_1	1	0	0	0	−2	−1	−2	✓
x_2	0	1	0	0	2	1	4	✓
x_3	0	0	1	0	−2	−1	−2	✓
x_4	0	0	0	1	2	1	4	
	0	0	0	0	1	1	2	✓
x_1	1	0	0	0	0	1	2	✓
x_2	0	1	0	0	0	−1	0	✓
x_3	0	0	1	0	0	1	2	✓
x_4	0	0	0	1	0	−1	0	✓
x_5	0	0	0	0	1	1	2	
	1	−1	1	−1	1			

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3-8 Lösungsweg

e_i - Anzahl der Einheiten von Erzeugnis i, $i = 1, 2$

1. Rohstoff: $40\,e_1 + 65\,e_2 = 3\,600$
2. Rohstoff: $50\,e_1 + 30\,e_2 = 2\,450$

	90	95	6 050 ✓	
BV	e_1	e_2	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	40	65	3 600	3 705
	50	30	2 450	2 530
e_1	1	1,625	90	92,625 ✓
	0	– 51,25	– 2 050	– 2 101,25 ✓
e_1	1	0	25	26 ✓
e_2	0	1	40	41 ✓
	25	40		

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2.3-9 a) Lösungsweg Zur Lösung von b)

	−1	−1	−1	0 ✓		
BV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$	
	1	−1	−1	0	−1	
	−1	1	−1	0	−1	
	−1	−1	1	0	−1	
x_1	1	−1	−1	0	−1	✓
	0	0	−2	0	−2	✓
	0	−2	0	0	−2	✓
x_1	1	0	−1	0	0	✓
	0	0	−2	0	−2	✓
x_2	0	1	0	0	1	✓
x_1	1	0	0	0	1	✓
x_3	0	0	1	0	1	✓
x_2	0	1	0	0	1	✓
	0	0	0			

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3-9 b) Lösungsweg Zur Lösung von a)

	6	− 12	9	6	0 ✓✓	
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	1	− 5	3	4	0	3
	2	− 4	3	2	0	3
	2	4	− 1	− 6	0	− 1
	1	− 7	4	6	0	4
x_1	1	− 5	3	4	0	3
	0	6	− 3	− 6	0	− 3 ✓
	0	14	− 7	− 14	0	− 7 ✓
	0	− 2	1	2	0	1 ✓
x_1	1	1	0	− 2	0	0 ✓
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~ ✓
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~ ✓
x_3	0	− 2↓	1	2↓	0	1 ✓
	− 1	1	2	0		
	2	0	− 2	1		

$$\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

x_1	0	1	0	0	0	0
$x_2 = t_1$	0	1	2	4	6	8 …
x_3	0	0	2	4	6	8
$x_4 = t_2$	0	1	1	2	3	4 …

Kapitel 2	Abschnitt 2.3		Aufgaben ◄	

2.3-10 Lösungsweg

	-1	3	1	0	
BV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	-1	1	1	3	4
	1	-2	-1	-3	-5
	-1	4	1	0	4
x_1	1	-1	-1	-3	-4 ✓
	0	-1	0	0	-1 ✓
	0	3	0	-3	0 ✓
x_1	1	0	-1	-3	-3 ✓
x_2	0	1	0	0	1 ✓
	0	0	0	-3	-3 ✓

$n = m = 3$

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2 \neq 3 = \mathrm{r}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$

Das Gleichungssystem ist unlösbar!

(Widerspruch im Gleichungssystem)

2.3-11 a) Lösungsweg Zur Lösung von b) Zur Lösung von c)

	7	−10	25	−20	18	5/0 ✓/✓✓✓	
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	2	−8	8	−16	6	−8	−16
	1	2	3	4	2	7	19
	4	−4	14	−8	10	6	22
	0	−12	2	−24	2	−22	−54 ✓
x_1	1	2	3	4	2	7	19
	0	−12	2	−24	2	−22	−54 ✓
x_3	0	−6	1	−12	1	−11	−27 ✓
x_1	1	20↓	0	40↓	−1↓	40	100 ✓
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~ ✓
	40	0	−11	0	0	inh.	
	−20	1	6	0	0		
	−40	0	12	1	0	hom.	
	1	0	−1	0	1		
		↑		↑	↑		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}, \qquad \boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3-11 b) Lösungsweg Zur Lösung von a) Zur Lösung von c)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	s
	10	13	−2	16	4	22/0 ✓/✓✓✓	
	1	1	1	1	1	1	6
	2	3	−2	4	0	6	13
	4	5	0	6	2	8	25
	3	4	−1	5	1	7	19
x_1	1	1	1	1	1	1	6
	0	1	−4	2	−2	4	1 ✓
	0	1	−4	2	−2	4	1 ✓
	0	1	−4	2	−2	4	1 ✓
x_1	1	0	5	−1	3	−3	5 ✓
x_2	0	1	−4↓	2↓	−2↓	4	1
	0	0	0	0	0	0	0 ✓
	0	0	0	0	0	0	0 ✓
	−3	4	0	0	0	inh.	
	−5	4	1	0	0		
	1	−2	0	1	0	hom.	
	−3	2	0	0	1		
			↑	↑	↑		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$$

2.3-11 c) Lösungsweg Zur Lösung von a) Zur Lösung von b)

	8	8	0	−4	12	0	20/0	✓/✓✓✓✓
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	***b***	***s***
	1	2	−1	2	5	−2	−8	−1
	3	2	1	−4	1	2	18	23
	4	4	0	−2	6	0	10	22
x_1	1	2	−1	2	5	−2	−8	−1
	0	−4	4	−10	−14	8	42	26 ✓
	0	−4	4	−10	−14	8	42	26 ✓
x_1	1	0	1	−3	−2	2	13	12 ✓
x_2	0	1	−1↓	$\frac{5}{2}$↓	$\frac{7}{2}$↓	−2↓	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{13}{2}$ ✓
	0	0	0	0	0	0	0	0 ✓
	13	$-\frac{21}{2}$	0	0	0	0	inh.	
	−1	1	1	0	0	0		
	3	$-\frac{5}{2}$	0	1	0	0		
	2	$-\frac{7}{2}$	0	0	1	0	hom.	
	−2	2	0	0	0	1		
			↑	↑	↑	↑		

Allgemeine Lösung:
$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -21/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -7/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spezielle Lösung:
$$\boldsymbol{x}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3-12 Lösungsweg

x_i – Stückzahlen der drei Büchersorten

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 30 \\ 18x_1 + 24x_2 + 30x_3 &= 600 \end{aligned}$$

$n = 3,\quad r = 2,\quad f = n - r = 1$

19	25	31	630/0	✓/✓
1	1	1	30	33
18	24	30	600	672
1	1	1	30	33
0	6	12	60	78 ✓
1	0	− 1	20	20 ✓
0	1	2↓	10	13 ✓
20	10	0	inh.	
1	− 2	1	hom.	

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

Es gibt die folgenden sechs sinnvollen Lösungen:

x_1	20	21	22	23	24	25
x_2	10	8	6	4	2	0
$x_3 = t$	0	1	2	3	4	5

2.3-13 Lösungsweg

3	5	-4	-1	6/0 ✓/✓✓	
1	2	-1	1	2	5
2	3	-3	-2	4	4
-3	-5	4	1	s	$-3+s$
1	2	-1	1	2	5
0	-1	-1	-4	0	-6 ✓
0	1	1	4	$6+s$	$12+s$ ✓
1	0	-3	-7	2	-7 ✓
0	1	1↓	4↓	0	6 ✓
0	0	0	0	$6+s$	$6+s$ ✓
2	0	0	0	inh.	
3	-1	1	0	hom.	
7	-4	0	1	hom.	
		↑	↑		

$n=3, \quad m=4, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$

1. Fall: $s=-6, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})=2, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2,$ das Gleichungssystem ist **lösbar**:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

Hinweis: Diese Lösung gilt nur für $s=-6$.

2. Fall: $s \neq -6, \quad \mathrm{r}(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = 3 \neq 2 = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}),$ das Gleichungssystem **unlösbar**.

2.3-14 Lösungsweg

Hinweis: Im folgenden Schema sind enthalten
- Berechnung der inversen Matrix (schwarz, Ergebnis $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist rot)
- Multiplikation von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ als Probe im FALKschen Schema (blaues Kreuz)
- Multiplikation von $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$ im FALKschen Schema (rotes Kreuz, Ergebnis $\boldsymbol{x}$ ist grün)

							s	
	1	2	4	1	0	0	8	
$\boldsymbol{A}$:	0	1	2	0	1	0	4	$\boldsymbol{E}$
	1	2	5	0	0	1	9	
	1	2	4	1	0	0	8	
	0	1	2	0	1	0	4	
	0	0	1	−1	0	1	1✓	
	1	0	0	1	−2	0	0✓	24
	0	1	2	0	1	0	4	11
	0	0	1	−1	0	1	1	28
	1	0	0	**1**	**−2**	**0**	0	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{E}$:	0	1	0	$\boldsymbol{A}^{-1}$: **2**	**1**	**−2**	2✓	
	0	0	1	**−1**	**0**	**1**	1	
	1	2	4	1	0	0		
$\boldsymbol{A}$:	0	1	2	0	1	0		✓ $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$
	1	2	5	0	0	1		(Probe)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.3-15 Lösungsweg

Hinweis: Im folgenden Schema sind enthalten
- Berechnung der inversen Matrix (schwarz, Ergebnis $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist **fett**)
- Multiplikation von $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ als Probe im FALKschen Schema (rotes Kreuz, $\boldsymbol{E}$ ist rot)

									s	
	1	2	1	3	1	0	0	0	8	
A :	0	1	0	1	0	1	0	0	3	***E***
	2	0	2	1	0	0	1	1	6	
	1	0	0	1	0	0	0	1	3	
	1	2	1	3	1	0	0	0	8	
	0	1	0	1	0	1	0	0	3	
	0	−4	0	−5	−2	0	1	0	−10	✓
	0	−2	−1	−2	−1	0	0	1	−5	✓
	1	0	1	1	1	−2	0	0	2	✓
	0	1	0	1	0	1	0	0	3	
	0	0	0	−1	−2	4	1	0	2	✓
	0	0	−1	0	−1	2	0	1	1	✓
	1	0	1	0	−1	2	1	0	4	✓
	0	1	0	0	−2	5	1	0	5	✓
	0	0	0	1	2	−4	−1	0	−2	✓
	0	0	−1	0	−1	2	0	1	1	✓
	1	0	0	0	−2	4	1	1	5	✓
	0	1	0	0	−2	5	1	0	5	
	0	0	0	1	2	−4	−1	0	−2	
	0	0	1	0	1	−2	0	−1	−1	✓
	1	0	0	0	**−2**	**4**	**1**	**1**		
E :	0	1	0	0	**−2**	**5**	**1**	**0**	$\boldsymbol{A}^{-1}$	
	0	0	1	0	**1**	**−2**	**0**	**−1**		
	0	0	0	1	**2**	**−4**	**−1**	**0**		
	1	2	1	3	**1**	**0**	**0**	**0**		
A :	0	1	0	1	**0**	**1**	**0**	**0**	***E*** ✓	
	2	0	2	1	**0**	**0**	**1**	**0**	Probe!	
	1	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**		

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3-16 Lösungsweg

	10	14	6	8	10	38/0 ✓/✓✓	
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$
	1	−5	1	4	3	1	5
	2	10	1	−2	−1	11	21
	1	−1	0	2	4	2	8
	6	10	4	4	4	24	52
x_1	1	−5	1	4	3	1	5
	0	20	−1	−10	−7	9	11 ✓
	0	4	−1	−2	1	1	3 ✓
	0	40	−2	−20	−14	18	22 ✓
x_1	1	15	0	−6	−4	10	16 ✓
x_3	0	−20	1	10	7	−9	−11 ✓
	0	−16	0	8	8	−8	−8 ✓
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~ ✓
x_1	1	3	0	0	2	4	10 ✓
x_3	0	0	1	0	−3	1	−1 ✓
x_4	0	−2↓	0	1	1↓	−1	−1 ✓
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~ ✓
	4	0	1	−1	0	inh.	
	−3	1	0	2	0	hom.	
	−2	0	3	−1	1	hom.	
		↑			↑		

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

Lösungen

2.4-1 a) $\boldsymbol{X} = (-\boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1}$ Lösungsweg

b) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}) \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1}$

2.4-2 $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{1-w}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{1-w}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w \neq 1$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.4-3 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -9 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ Lösungsweg

2.4-1 Lösungsweg

a)

$$XA + B - 2X = 0$$
$$X(A - 2E) = -B$$
$$X = -B(A - 2E)^{-1}$$

b)

$$A - XA + C = XB$$
$$(A + C) = X(A + B)$$
$$X = (A + C)(A + B)^{-1} \quad \text{oder:} \quad X = (-A - C)(-A - B)^{-1}$$

2.4-2 Lösungsweg

$$x + Ab - wx = c \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad w = -2$$

$$x - wx = c - Ab \qquad Ab = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$(1 - w)\,x = c - Ab$$

$$x = \frac{1}{1-w}(c - Ab) = \frac{1}{1+2}\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.4-3 Lösungsweg

$$AX + 2B = C + BX$$
$$AX - BX = C - 2B$$
$$(A - B)X = C - 2B$$
$$X = (A - B)^{-1}(C - 2B)$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \qquad C - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

							s	
	−1	4	3	1	0	0	7	
A:	−1	5	3	0	1	0	8	E
	1	−6	−4	0	0	1	−8	
	1	−4	3	−1	0	0	−7	
	0	1	0	−1	1	0	1✓	
	0	−2	−1	1	0	1	−1✓	
	1	0	−3	−5	4	0	−3✓	
	0	1	0	−1	1	0	1✓	
	0	0	−1	−1	2	1	1✓	
	1	0	0	**−2**	**−2**	**−3**	−6✓	
E:	0	1	0	**−1**	**1**	**0**	1✓	A^{-1}
	0	0	1	**1**	**−2**	**−1**	−1✓	
	−1	4	3	**1**	**0**	**0**		
A:	−1	5	3	**0**	**1**	**0**	✓	$E = A \cdot A^{-1}$
	1	−6	−4	**0**	**0**	**1**		(Probe)

Hinweis
Im Schema sind enthalten:

- Berechnung der inversen Matrix (schwarz).
Das Ergebnis A^{-1} ist **blau**.

- Multiplikation von $A \cdot A^{-1} = E$ als Probe im FALKschen Schema (blaues Kreuz, E ist rot)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -9 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösungen

2.5-1 $\boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{8}{3}\end{pmatrix} + t_4\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},$ $\sum_{i=1}^{4} t_i = 1,\quad t_i \geq 0, \forall i$ Lösungsweg

2.5-2

a) $\boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix} + t_4\begin{pmatrix}20\\70\end{pmatrix} + t_5\begin{pmatrix}0\\70\end{pmatrix},$ $\sum_{i=1}^{5} t_i = 1,\quad t_i \geq 0, \forall i$

b) 100 bei $\boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix},$ $\sum_{i=1}^{2} t_i = 1,\quad t_i \geq 0, \forall i$ Lösungsweg

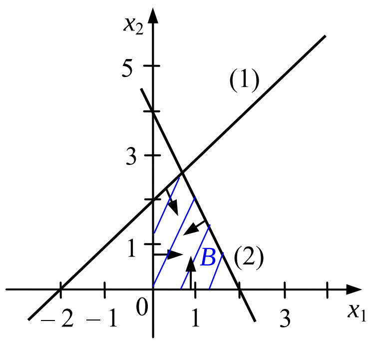
2.5-1 Lösungsweg

2. Möglichkeit

BV	x_1 ↓	x_2 (↓)	x_3	x_4	b	s	q
x_3	−1	1	1	0	2	3	-
← x_4	2	1	0	1	4	8	2 ←
		↓					
← x_3	0	3/2	1	1/2	4	7✓	8/3 ←
→ x_1	1	1/2	0	1/2	2	4✓	4
				↓			
→ x_2	0	1	2/3	1/3	8/3	14/3✓	8
← x_1	1	0	−1/3	1/3	2/3	5/3✓	2 ←
			↓				
← x_2	−1	1	1	0	2	3✓	2 ←
→ x_4	3	0	−1	1	2	5✓	-
	↓						
→ x_3	−1	1	1	0	2	3	
x_4	2	1	0	1	4	8✓	

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x}_5 = \boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} + t_4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \sum_{i=1}^{4} t_i = 1, \quad t_i \geq 0, \forall i$$



2.5-2 Lösungsweg

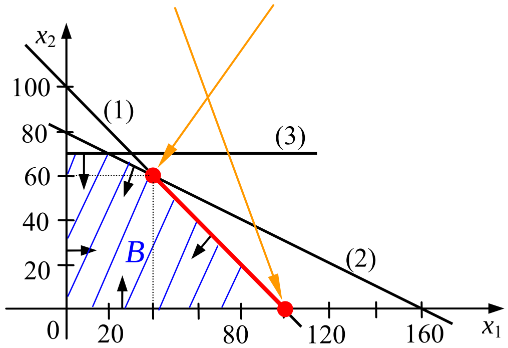
2. Möglichkeit

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{s}$	q	
		↓	(↓)							
←	x_3	3	3	1	0	0	300	307	100 ←	
	x_4	2	4	0	1	0	320	327	160	$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
	x_5	0	4	0	0	1	280	285	-	
			↓							
→	x_1	1	1	1/3	0	0	100	102 1/3 ✓	100	
←	x_4	0	2	− 2/3	1	0	120	122 1/3 ✓	60 ←	$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}$
	x_5	0	4	0	0	1	280	285	70	
				↓						
	x_1	1	0	2/3	− 1/2	0	40	41 1/6 ✓	60	
→	x_2	0	1	− 1/3	1/2	0	60	61 1/6 ✓	-	$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix}$
←	x_5	0	0	4/3	− 2	1	40	40 1/3 ✓	30 ←	
					↓					
←	x_1	1	0	0	1/2	− 1/2	20	21 ✓	40 ←	
	x_2	0	1	0	0	1/4	70	71 1/4 ✓	-	$\boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}20\\70\end{pmatrix}$
→	x_3	0	0	1	− 3/2	3/4	30	30 1/4 ✓	-	
						↓				
→	x_4	2	0	0	1	− 1	40	42 ✓	-	
←	x_2	0	1	0	0	1/4	70	71 1/4	285 ←	$\boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix}0\\70\end{pmatrix}$
	x_3	3	0	1	0	− 3/4	90	93 1/4 ✓	-	
		↓								
	x_4	2	4	0	1	0	320	327 ✓		
→	x_5	0	4	0	0	1	280	285 ✓		$\boldsymbol{x}_6=\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
	x_3	3	3	1	0	0	300	307 ✓		

a) $\boldsymbol{x}=t_1\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}+t_3\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix}+t_4\begin{pmatrix}20\\70\end{pmatrix}+t_5\begin{pmatrix}0\\70\end{pmatrix},\quad \sum_{i=1}^{5}t_i=1,\quad t_i\ge 0,\ \forall i$

b) Maximale Summe mit 100 in den Punkten $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix}$ und somit bei

$$\boldsymbol{x}=t_1\begin{pmatrix}100\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}40\\60\end{pmatrix},\quad \sum_{i=1}^{2}t_i=1,\quad t_i\ge 0,\ \forall i\,.$$



Lösungen

2.6-1 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{pmatrix}, \quad Z_{\max} = 18\,000$

Der Händler sollte 6 000 Liter trockenen Sekt und 4 000 Liter halbtrockenen Sekt bestellen, damit sein Gewinn mit 18 000 € maximal wird. Lösungsweg

2.6-2 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad Z_{\max} = 175$ Lösungsweg

2.6-3

$Z_1 = \quad x_1 + 3x_2 + 6 \to \max \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Z_{\max} = 22$ Lösungsweg

$Z_2 = \quad x_1 + 2x_2 + 6 \to \max \quad \boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t_1 + t_2 = 1,\ t_1, t_2 \geq 0 \quad Z_{\max} = 17$ Lösungsweg

$Z_3 = -x_1 - 3x_2 + 6 \to \max$ Keine endliche Lösung! $(Z \to \infty)$ Lösungsweg

2.6-4 $x_1 = 40,\ x_2 = 0,\ x_3 = 20, \quad Z_{\max} = 2\,200$ Lösungsweg

2.6-5 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z_{\max} = 0$ Lösungsweg

2.6-6 a) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Z_{\min} = -8$ Lösungsweg

b) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad Z_{\min} = 530$ Lösungsweg

2.6-7 $x_1 = 2,\ x_2 = 20,\ x_3 = 12, \quad Z_{\min} = -28$ Lösungsweg

2.6-8 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -Z_{\max} = -1\,500,\ Z_{\min} = 1\,500$ Lösungsweg

$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{\max} = 1\,500 = Z_{\min}$

2.6-1 Lösungsweg

$$Z = 2x_1 + 1{,}5\,x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrclr}
-4x_1 & + & 6x_2 & \le & 0 & (1)\\
x_1 & & & \ge & 3\,000 & (2)\\
 & & x_2 & \ge & 1\,000 & (3)\\
x_1 & & & \le & 6\,000 & (4)\\
 & & x_2 & \le & 5\,000 & (5)\\
\hline
 & & \mathbf{x} & \ge & \mathbf{0} &
\end{array}$$

[wegen: $x_2 \le 0{,}4(x_1 + x_2)$]

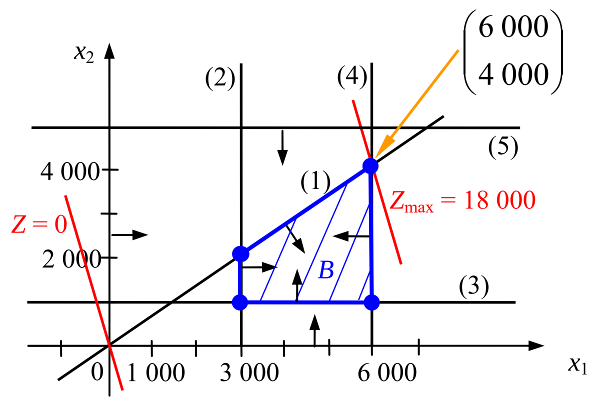
2. Normalform:

$$\begin{array}{l}
Z = 2x_1 + 1{,}5x_2 \rightarrow \max\\
-4x_1 + 6x_2 \le 0\\
-x_1 \le -3\,000\\
-x_2 \le -1\,000\\
x_1 \le 6\,000\\
x_2 \le 5\,000\\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{array}$$

1. Normalform:

$$\begin{array}{l}
Z = 2x_1 + 1{,}5x_2 \rightarrow \max\\
-4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0\\
-x_1 + x_4 = -3\,000\\
-x_2 + x_5 = -1\,000\\
x_1 + x_6 = 6\,000\\
x_2 + x_7 = 5\,000\\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{array}$$

Grafische Lösung



Rechnerische Lösung

1	NBV	x_1	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	2	1,5	0	q
x_3	0	– 4	6	0	-
x_4	0	– 1	0	– 3 000	-
x_5	0	0	– 1	– 1 000	-
x_6	0	1	0	6 000	6 000 ←
x_7	0	0	1	5 000	-
	$\boldsymbol{g}$	– 2 ↑	– 1,5	0	
2	NBV	x_6	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	1,5	0	q
x_3	0	4	6	24 000	4 000 ←
x_4	0	1	0	3 000	-
x_5	0	0	– 1	– 1 000	-
x_1	2	1	0	6 000	-
x_7	0	0	1	5 000	5 000
	$\boldsymbol{g}$	2	– 1,5 ↑	12 000	
3	NBV	x_6	x_3	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	0	q
x_2	1,5	2/3	1/6	4 000	
x_4	0	1	0	3 000	
x_5	0	2/3	1	3 000	
x_1	2	1	0	6 000	
x_7	0	– 2/3	– 1	1 000	
	$\boldsymbol{g}$	3	0,25	18 000	

Lösung: Der Händler sollte 6 000 Liter trockenen Sekt und 4 000 Liter halbtrockenen Sekt bestellen, damit sein Gewinn mit 18 000 € maximal wird.

2.6-2 Lösungsweg

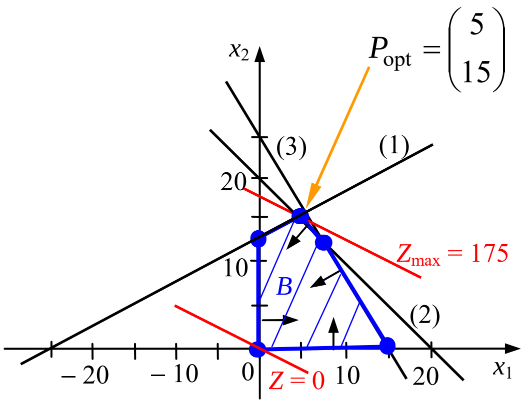
2. Normalform:

$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 10x_2 &\to \max \\ -x_1 + 2x_2 &\le 25 \\ x_1 + x_2 &\le 20 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 75 \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

1. Normalform:

$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 10x_2 &\to \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 25 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 20 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_5 &= 75 \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Grafische Lösung



Rechnerische Lösung

1	NBV	x_1	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	5	10	0	q
x_3	0	– 1	2	25	12,5 ←
x_4	0	1	1	20	20
x_5	0	5	3	75	25
	$\boldsymbol{g}$	– 5	– 10 ↑	0	
2	NBV	x_1	x_3	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	5	0	0	q
x_2	10	– 1/2	1/2	25/2	-
x_4	0	3/2	– 1/2	15/2	5 ←
x_5	0	13/2	– 3/2	75/2	75/13
	$\boldsymbol{g}$	– 10 ↑	5	250/2	
3	NBV	x_4	x_3	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	0	q
x_2	10	1/3	1/3	15	
x_1	5	2/3	– 1/3	5	
x_5	0	– 13/3	2/3	5	
	$\boldsymbol{g}$	20/3	5/3	175	

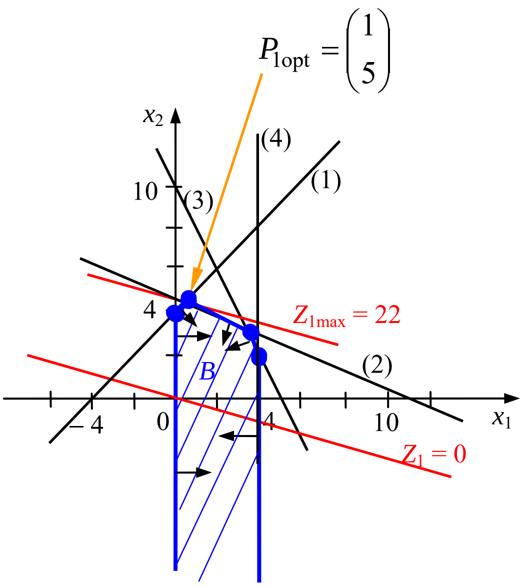
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad Z_{max} = 175$$

2.6-3 Lösungsweg

Zur Lösung von Z_2 Zur Lösung von Z_3

Z_1:

Grafische Lösung



Rechnerische Lösung

$x_2 = (x_{21} - x_{22})$

2. Normalform:

$$
\begin{array}{llcl}
Z_1 = & x_1 + 3(x_{21} - x_{22}) + 6 \rightarrow \max & & \\
-x_1 & + \ (x_{21} - x_{22}) & \leq & 4 \\
x_1 & + 2(x_{21} - x_{22}) & \leq & 11 \\
2x_1 & + \ (x_{21} - x_{22}) & \leq & 10 \\
x_1 & & \leq & 4 \\
 & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

1. Normalform:

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z_1 - 6 = & x_1 + 3x_{21} - 3x_{22} \rightarrow \max & & & & & & \\
-x_1 & + x_{21} - x_{22} & + x_3 & & & & = & 4 \\
x_1 & + 2x_{21} - 2x_{22} & & + x_4 & & & = & 11 \\
2x_1 & + x_{21} - x_{22} & & & + x_5 & & = & 10 \\
x_1 & & & & & + x_6 & = & 4 \\
 & & & & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

Z_1	NBV	x_1	x_{21}	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1	3	– 3	– 6	q
x_3	0	– 1	1	– 1	4	4 ←
x_4	0	1	2	– 2	11	5,5
x_5	0	2	1	– 1	10	10
x_6	0	1	0	0	4	-
	$\boldsymbol{g}$	– 1	– 3 ↑	3	6	
2	NBV	x_1	x_3	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1	0	– 3	– 6	q
x_{21}	3	– 1	1	– 1	4	-
x_4	0	3	– 2	0	3	1 ←
x_5	0	3	– 1	0	6	2
x_6	0	1	0	0	4	4
	$\boldsymbol{g}$	– 4 ↑	3	0	18	
3	NBV	x_4	x_3	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	– 3	– 6	q
x_{21}	3	1/3	1/3	– 1	5	-
x_1	1	1/3	– 2/3	0	1	-
x_5	0	– 1	1	0	3	-
x_6	0	– 1/3	2/3	0	3	-
	$\boldsymbol{g}$	4/3	1/3	0 ↑	22	

$x_2 = (x_{21} - x_{22}) = 5 - 0 = 5$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Z_{1\max} = 22$

2.6-3 Lösungsweg Zur Lösung von Z_1 Zur Lösung von Z_3

Z_2:

$x_2 = (x_{21} - x_{22})$

2. Normalform:

$$
\begin{aligned}
Z_2 &= x_1 + 2(x_{21} - x_{22}) + 6 \to \max \\
-x_1 &+ (x_{21} - x_{22}) \le 4 \\
x_1 &+ 2(x_{21} - x_{22}) \le 11 \\
2x_1 &+ (x_{21} - x_{22}) \le 10 \\
x_1 & \le 4 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

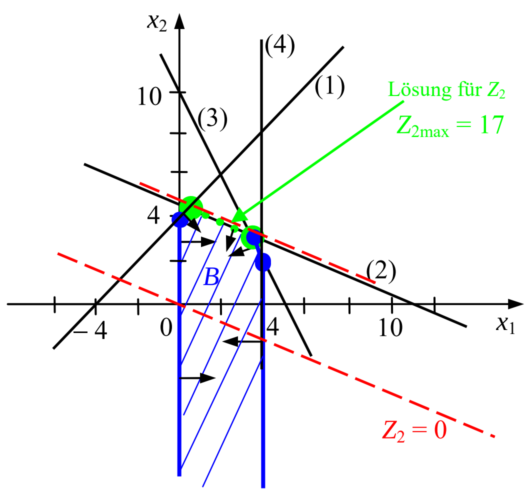
1. Normalform:

$$
\begin{aligned}
Z_2 - 6 &= x_1 + 2x_{21} - 2x_{22} \to \max \\
-x_1 &+ x_{21} - x_{22} + x_3 = 4 \\
x_1 &+ 2x_{21} - 2x_{22} + x_4 = 11 \\
2x_1 &+ x_{21} - x_{22} + x_5 = 10 \\
x_1 &+ x_6 = 4 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Rechnerische Lösung

Z_2	NBV	x_1	x_{21}	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1	2	– 2	– 6	q
x_3	0	– 1	1	– 1	4	4 ←
x_4	0	1	2	– 2	11	5,5
x_5	0	2	1	– 1	10	10
x_6	0	1	0	0	4	-
	$\boldsymbol{g}$	– 1	– 2 ↑	2	6	
2	NBV	x_1	x_3	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1	0	– 2	– 6	q
x_{21}	2	– 1	1	– 1	4	-
x_4	0	3	– 2	0	3	1 ←
x_5	0	3	– 1	0	6	2
x_6	0	1	0	0	4	4
	$\boldsymbol{g}$	– 3 ↑	2	0	14	
3	NBV	x_4	x_3	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	– 2	– 6	q
x_{21}	3	1/3	1/3	– 1	5	15
x_1	1	1/3	– 2/3	0	1	-
x_5	0	– 1	1	0	3	3 ←
x_6	0	– 1/3	2/3	0	3	9/2
	$\boldsymbol{g}$	1	0 ↑	0	17	
4	NBV	x_4	x_5	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	– 2	– 6	q
x_{21}	3	2/3	– 1/3	– 1	4	15
x_1	1	– 1/3	2/3	0	3	9/2
x_3	0	– 1	1	0	3	3 ←
x_6	0	1/3	– 2/3	0	1	-
	$\boldsymbol{g}$	1	0 ↑	0	17	

Grafische Lösung



$x_2 = (x_{21} - x_{22}) = 4 - 0 = 4$

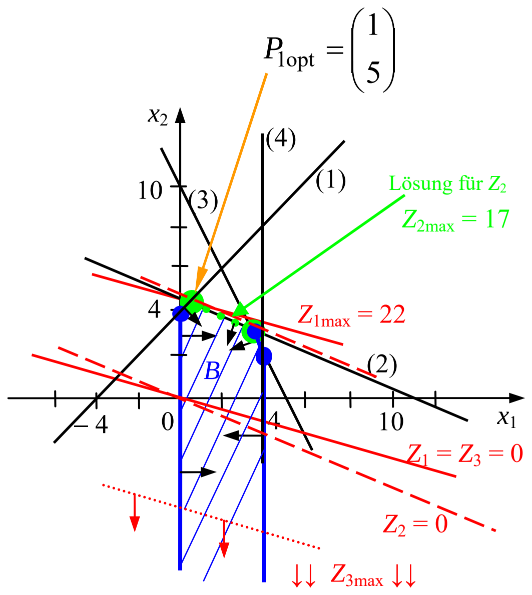
$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix};\quad \text{also}\quad \mathbf{x} = t_1\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\quad \text{mit}\ t_1 + t_2 = 1,\quad t_1, t_2 \ge 0 \qquad Z_{2\max} = 17$$

2.6-3 Lösungsweg Zur Lösung von Z_1 Zur Lösung von Z_2

Z_3:

Grafische Lösung

Hinweis: Gemeinsame Skizze für Z_1, Z_2 und Z_3.



keine Lösung!

Rechnerische Lösung

$x_2 = (x_{21} - x_{22})$

2. Normalform:

$$Z_3 = -x_1 - 3(x_{21} - x_{22}) + 6 \to \max$$

$$\begin{array}{rcl}
-x_1 + (x_{21} - x_{22}) & \le & 4 \\
x_1 + 2(x_{21} - x_{22}) & \le & 11 \\
2x_1 + (x_{21} - x_{22}) & \le & 10 \\
x_1 & \le & 4 \\
\mathbf{x} & \ge & \mathbf{0}
\end{array}$$

1. Normalform:

$$Z_3 - 6 = -x_1 - 3x_{21} + 3x_{22} \to \max$$

$$\begin{array}{rcl}
-x_1 + x_{21} - x_{22} + x_3 & = & 4 \\
x_1 + 2x_{21} - 2x_{22} + x_4 & = & 11 \\
2x_1 + x_{21} - x_{22} + x_5 & = & 10 \\
x_1 + x_6 & = & 4 \\
\mathbf{x} & \ge & \mathbf{0}
\end{array}$$

Z_3	NBV	x_1	x_{21}	x_{22}	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	– 1	– 3	3	– 6	q
x_3	0	– 1	1	– 1	4	-
x_4	0	1	2	– 2	11	-
x_5	0	2	1	– 1	10	-
x_6	0	1	0	0	4	-
	$\boldsymbol{g}$	1	3	– 3 ↑	6	

Es kann kein Hauptelement gefunden werden. Es liegt auch keine optimale Lösung vor.
Es gibt keine (endliche) Lösung.

2.6-4 Lösungsweg

2. Normalform:

$$
\begin{array}{llllll}
Z = & 30x_1 + 20x_2 + 50x_3 \to \max \\
x_1 & + \; x_2 & + \; x_3 & \leq & 60 \\
x_1 & & & \geq & 30 \\
x_1 & + \; x_2 & & \geq & 40 \\
& & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

1. Normalform:

$$
\begin{array}{llllll}
Z = & 30x_1 + 20x_2 + 50x_3 \to \max \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & & = & 60 \\
-x_1 & + x_5 & & = & -30 \\
-x_1 - x_2 & & + x_6 & = & -40 \\
& & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

1	NBV	x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	30	20	50	0	q
x_4	0	1	1	1	60	60 ←
x_5	0	– 1	0	0	– 30	-
x_6	0	– 1	– 1	0	– 40	-
	$\boldsymbol{g}$	– 30	– 20	– 50 ↑	0	
2	NBV	x_1	x_2	x_4	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	30	20	0	0	q
x_3	50	1	1	1	60	
x_5	0	– 1	0	0	– 30	
x_6	0	– 1	– 1	0	– 40	←
	$\boldsymbol{g}$	20	30	50	3 000	
	p	20 ↑	30	-		
3	NBV	x_6	x_2	x_4	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	20	0	0	q
x_3	50	1	0	1	20	
x_5	0	– 1	1	0	10	
x_1	30	– 1	1	0	40	
	$\boldsymbol{g}$	20	10	50	2 200	

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\max} = 2\,200
$$

2.6-5 Lösungsweg

Aufgabe

$$\begin{array}{l} Z = x_1 + 2x_2 \to \max \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \le -1 \\ -2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \text{ beliebig} \\ x_2 \ge 0 \end{array}$$

2. Normalform

$$\begin{array}{l} x_1 = (x_{11} - x_{12}) \\ Z = (x_{11} - x_{12}) + 2x_2 \to \max \\ -(x_{11} - x_{12}) + 2x_2 \le 4 \\ 4(x_{11} - x_{12}) + 2x_2 \le -1 \\ -2(x_{11} - x_{12}) + x_2 = 5 \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

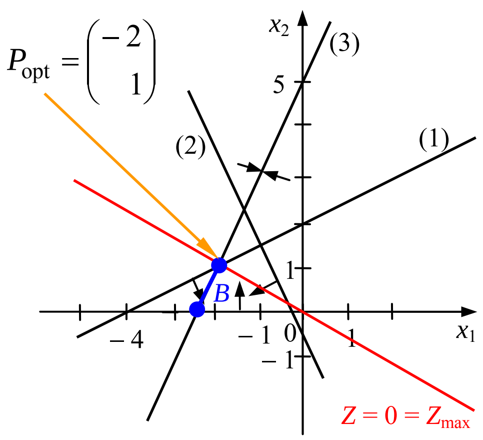
1. Normalform

$$\begin{array}{l} x_1 = x_{11} - x_{12} \\ Z = x_{11} - x_{12} + 2x_2 - Mx_5^* \to \max \\ -x_{11} + x_{12} + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_{11} - 4x_{12} + 2x_2 + x_4 = -1 \\ -2x_{11} + 2x_{12} + x_2 + x_5^* = 5 \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

Rechnerische Lösung

1	NBV	x_{11}	x_{12}	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1	– 1	2	0	q
x_3	0	– 1	1	2	4	4
x_4	0	4	– 4	2	– 1	-
x_5^*	– M	– 2	2	1	5	2,5 ←
	$\boldsymbol{g}$	– 1	1	– 2	0	
	*	2	– 2 ↑	– 1	– 5	
2	NBV	x_{11}	x_5^*	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1		2	0	q
x_3	0	0		3/2	3/2	1 ←
x_4	0	0		4	9	9/4
x_{12}	– 1	– 1		1/2	5/2	5
	$\boldsymbol{g}$	0		– 5/2 ↑	– 5/2	
	*	0		0	0	
3	NBV	x_{11}		x_3	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	1		0	0	q
x_2	2	0		2/3	1	
x_4	0	0		– 6	5	
x_{12}	– 1	– 1		– 1/3	2	
	$\boldsymbol{g}$	0		50	0	

Grafische Lösung



$x_1 = x_{11} - x_{12} = 0 - 2 = -2, \quad x_2 = 1; \quad Z_{max} = 0$

ODER:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Z_{max} = 0$$

2.6-6 a) Lösungsweg

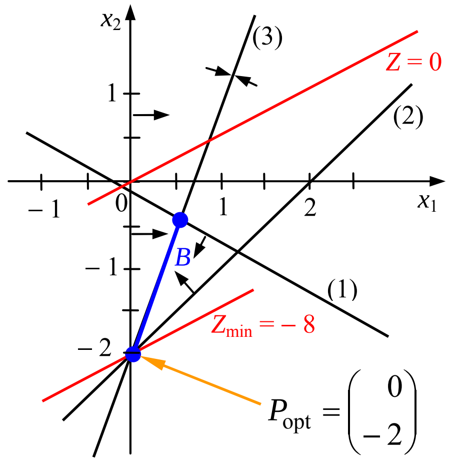
Zur Lösung von b)

2. Normalform: $x_2 = x_{21} - x_{22}$

$$-Z = 2x_1 - 4(x_{21} - x_{22}) \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3(x_{21} - x_{22}) &\le -1 \\ x_1 - \ (x_{21} - x_{22}) &\le 2 \\ 6x_1 - 2(x_{21} - x_{22}) &= 4 \\ x_1, x_{21}, x_{22} &\ge 0 \end{aligned}$$

Grafische Lösung



1. Normalform: $x_2 = x_{21} - x_{22}, \ M >> 0$

$$-Z = 2x_1 - 4x_{21} + 4x_{22} - M x_5^* \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_{21} - 3x_{22} + x_3 \qquad &= -1 \\ x_1 - \ x_{21} + \ x_{22} \qquad + x_4 &= 2 \\ 6x_1 - 2x_{21} + 2x_{22} \qquad + x_5^* &= 4 \\ x_1, x_{21}, x_{22}, x_3, x_4, x_5^* &\ge 0 \end{aligned}$$

1	NBV	x_1	x_{21}	x_{22}	***b***	
BV	– 1	2	– 4	4	0	q
x_3	0	2	3	– 3	– 1	/
x_4	0	1	– 1	1	2	2
x_5^*	$-M$	6	– 2	2	4	2/3 ←
	g	– 2	4	– 4	0	
	*	– 6 ↑	2	– 2	– 4	
2	NBV	x_5^*	x_{21}	x_{22}	***b***	
BV	– 1	$-M$	– 4	4	0	q
x_3	0		11/3	– 11/3	– 7/3	/
x_4	0		– 2/3	2/3	4/3	2 ←
x_1	2		– 1/3	1/3	2/3	2
	g		10/3	– 10/3 ↑	4/3	
3	NBV		x_{21}	x_4	***b***	
BV	– 1		– 4	0	0	q
x_3	0		0	11/2	5	/
x_{22}	4		– 1	3/2	2	/
x_1	2		0	– 1/2	0	/
	g		0 ↑	5	8	

$x_1 = 0, \quad x_2 = x_{21} - x_{22} = 0 - 2 = -2; \qquad -Z_{max} = 8 \qquad Z_{min} = -8$

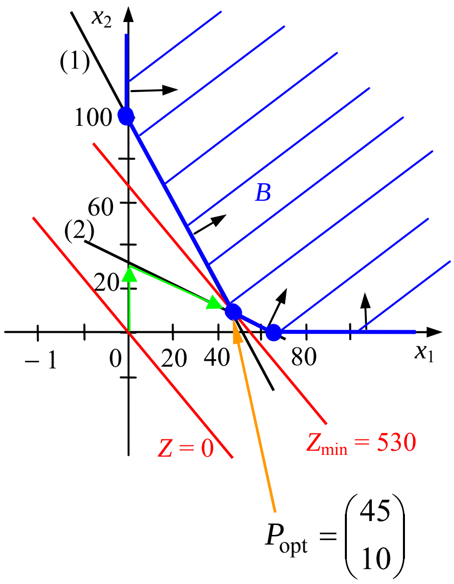
2.6-6 b) Lösungsweg Zur Lösung von a)

$Z = 10x_1 + 8x_2 \to \min$
$2x_1 + x_2 \geq 100$
$2x_1 + 4x_2 \geq 130$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Normalform:
$-Z = -10x_1 - 8x_2 \to \max$
$-2x_1 - x_2 \leq -100$
$-2x_1 - 4x_2 \leq -130$
$x_1, x_2 \geq 0$

1. Normalform:
$-Z = -10x_1 - 8x_2 \to \max$
$-2x_1 - x_2 + x_3 = -100$
$-2x_1 - 4x_2 + x_4 = -130$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Grafische Lösung



1	NBV	x_1	x_2	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	– 10	– 8	0	q
x_3	0	– 2	– 1	– 100	
x_4	0	– 2	– 4	– 130	←
	$\boldsymbol{g}$	10	8	0	
	p	5	2 ↑		
2	NBV	x_1	x_4	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	– 10	0	0	q
x_3	0	– 3/2	– 1/4	– 135/2	←
x_2	– 8	1/2	– 1/4	65/2	
	$\boldsymbol{g}$	6	2	– 260	
	p	4 ↑	8		
3	NBV	x_3	x_4	$\boldsymbol{b}$	
BV	– 1	0	0	0	q
x_1	– 10	– 2/3	1/6	45	
x_2	– 8	1/3	– 1/3	10	
	$\boldsymbol{g}$	4	1	– 530	

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad -Z_{max} = -530, \quad Z_{min} = 530$$

2.6-7 Lösungsweg

2. Normalform:

$$\begin{array}{rcl} -Z = -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \rightarrow & \max \\ 2x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 & \leq & 16 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 6 \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 & = & 10 \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

1. Normalform:

$$\begin{array}{rcl} -Z = -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \rightarrow & \max \\ 2x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 16 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad + x_6^* & = & 6 \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 \qquad + x_7^* & = & 10 \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

1	NBV	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boldsymbol{b}$	
BV	−1	−2	1	1	1	0	q
x_5	0	2	0	1	−2	16	-
x_6^*	$-M$	−1	1	−1	1	6	6 ←
x_7^*	$-M$	−1	0	1	1	10	10
	$\boldsymbol{g}$	2	−1	−1	−1	0	
	*	2	−1	0	−2 ↑	−16	
2	**NBV**	x_1	x_2	x_3	x_6^*	$\boldsymbol{b}$	
BV	−1	−2	1	1	$-M$	0	q
x_5	0	0	2	−1		28	-
x_4	1	−1	1	−1		6	-
x_7^*	$-M$	0	−1	2		4	2 ←
	$\boldsymbol{g}$	1	0	−2		6	
	*	0	1	−2 ↑		−4	
3	**NBV**	x_1	x_2	x_7^*		$\boldsymbol{b}$	
BV	−1	−2	1	$-M$		0	q
x_5	0	0	3/2			30	20
x_4	1	−1	1/2			8	16 ←
x_3	1	0	−1/2			2	-
	$\boldsymbol{g}$	1	−1 ↑			10	
4	**NBV**	x_1	x_4			$\boldsymbol{b}$	
BV	−1	−2	1			0	q
x_5	0	3	−3			6	2 ←
x_2	1	−2	2			16	-
x_3	1	−1	1			10	-
	$\boldsymbol{g}$	−1 ↑	2			26	
5	**NBV**	x_5	x_4			$\boldsymbol{b}$	
BV	−1	0	1			0	q
x_1	−2	1/3	−1			2	
x_2	1	2/3	0			20	
x_3	1	1/3	0			12	
	$\boldsymbol{g}$	1/3	1			28	

$-Z_{max} = 28$
$Z_{min} = -28$

$x_1 = 2$
$x_2 = 20$
$x_3 = 12$

2.6-8 Lösungsweg

Primale Aufgabe

Hinweis: Dieses ist noch nicht die 2. Normalform!

$$Z = 40x_1 + 10x_2 + 15x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 150 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 200 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 &\geq -180 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Duale Aufgabe

$$W = 150y_1 + 200y_2 - 180y_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - 3y_3 &\leq 40 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &\leq 10 \\ y_1 + y_2 - y_3 &\leq 15 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1	NBV	x_1	x_2	x_3	***b***	
BV	–1	– 40	– 10	– 15	0	q
x_4	0	– 2	– 1	– 1	– 150	
x_5	0	– 1	– 2	– 1	– 200	←
x_6	0	3	1	1	180	
	g	40	10	15	0	
	p	40	5 ↑	15		
2	NBV	x_1	x_5	x_3	***b***	
BV	–1	– 40	0	– 15	0	q
x_4	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	– 50	←
x_2	–10	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	100	
x_6	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	80	
	g	35	5	10	–1 000	
	p	23,3	10 ↑	20		
3	NBV	x_1	x_4	x_3	***b***	
BV	–1	– 40	0	– 15	0	q
x_5	0	3	– 2	1	100	
x_2	–10	2	– 1	1	150	
x_6	0	1	1	0	30	
	g	20	10	5	– 1 500	

1	NBV	y_1	y_2	y_3	***b***	
BV	–1	150	200	–180	0	q
y_4	0	2	1	– 3	40	40
y_5	0	1	2	– 1	10	5 ←
y_6	0	1	1	– 1	15	15
	g	– 150	– 200 ↑	180	0	
2	NBV	y_1	y_5	y_3	***b***	
BV	–1	150	0	– 180	0	q
y_4	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	35	23,3
y_2	200	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	10 ←
y_6	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10	20
	g	–50 ↑	100	80	1 000	
3	NBV	y_2	y_5	y_3	***b***	
BV	–1	200	0	– 180	0	q
y_4	0	– 3	– 2	– 1	20	
y_1	150	2	1	– 1	10	
y_6	0	– 1	– 1	0	5	
	g	100	150	30	1 500	

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-Z_{\max} = -1\,500, \; Z_{\min} = 1\,500$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_{\max} = 1\,500 = Z_{\min}$$

Funktionen, Folgen, Reihen: Grundfunktionen einer reellen Variablen

3.5-1 Aufgabe
Bestimmen Sie $f(0)$, $f(1)$ und $f(-1)$, wenn $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x$

3.5-2 Aufgabe
In einem Unternehmen werden Fernsehgeräte produziert. Dabei entstehen monatlich fixe Kosten in Höhe von 5 000 €. Die variablen Kosten für jedes produzierte Gerät betragen 400 €.
Aus Kapazitätsgründen ist die Produktionsumfang monatlich auf 2 000 Geräte beschränkt.
a) Stellen Sie diesen Sachverhalt mathematisch durch eine Funktion dar.
b) Skizzieren sie diese Funktion!
c) Bei welchem Produktionsumfang liegt die Gewinnschwelle (Gewinn ≥ 0), wenn der Erlös jedes Gerätes 410 € beträgt.

3.5-3 Aufgabe
Für den Kauf von Büromaterial wird Mengenrabatt gewährt.
Modell A: Werden weniger 100 Stück geordert, ist ein Preis von 2,50 € zu zahlen, ab 100 Stück beträgt der Preis 2,00 €.
Modell B: Bis zu 100 Stück ist ein Preis von 2,50 € zu zahlen, jedes darüber hinaus gehende Stück kostet 2,00 €.
a) Stellen Sie beide Sachverhalte mathematisch durch je eine Funktion dar.
b) Skizzieren Sie die Funktionen.

3.5-4 Aufgabe
Bestimmen Sie für folgende Funktionen den Definitionsbereich, die Umkehrfunktion und deren Definitionsbereich:

a) $y = 3x + 4$ b) $y = 3 + \frac{1}{x}$ c) $y = \frac{1-x}{1+x}$

d) $y = \mathrm{e}^{3x}$ e) $y = \ln(x-1)$

3.5-5 Aufgabe
Die Abhängigkeit der Kosten K vom Produktionsumfang x ist durch die Funktion $K(x) = 5\,000 + 40x$ gegeben.
a) Stellen Sie den Produktionsumfang in Abhängigkeit von den Kosten in der Form $x(K)$ dar.
b) Welches sind jeweils die unabhängigen und die abhängigen Variablen?
c) Durch welche Funktion werden die Kosten je Stück beschrieben?

Funktionen, Folgen, Reihen: Zahlenfolgen, Zahlenreihen

3.6-1 Aufgabe
Gegeben sind die folgenden Zahlenfolgen:
a) 2, 4, 6, 8, ...
b) 1, 4, 7, 10, ...
c) 1, 2, 4, 8, ...
Ermitteln Sie jeweils die rekursive und unabhängige Darstellung (allgemeines Glied der Folge).

3.6-2 Aufgabe
Gegeben ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = -10$ und $a_2 = 5$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 6 Glieder?

3.6-3 Aufgabe
Gegeben ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = 10$ und $d = -5$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 6 Glieder?

3.6-4 Aufgabe
Gegeben ist eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = 4$ und $a_4 = 16$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 4 Glieder?

3.6-5 Aufgabe
Gegeben ist eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 1$ und $a_2 = -2$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 6 Glieder?

3.6-6 Aufgabe
Gegeben ist eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 10$ und $q = 3$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 6 Glieder?

3.6-7 Aufgabe
Gegeben ist eine geometrische Zahlenfolge mit $a_1 = 5$ und $a_4 = 20$. Geben Sie die rekursive und unabhängige Darstellung dieser Zahlenfolge an. Wie lauten ihre ersten 4 Glieder?

3.6-8 Aufgabe (Zahlenreihe)
a) Berechnen Sie unter Ausnutzung der Summenformeln die Summen der ersten 20 Glieder der Zahlenfolgen aus den Aufgaben 3.6-1 bis 3.6-7.
b) Welche der Zahlenfolgen sind alternierend?

3.6-9 Aufgabe
Eine Zeitung von 0,5 mm Dicke wird 30-mal gefaltet. Welches ist die Dicke nach dem
a) 10.
b) 20. und
c) 30. Falten?

Funktionen, Folgen, Reihen: Zahlenreihen

3.6-10 Aufgabe

Ein Student bietet seinem Kommilitonen an, dessen Diplomarbeit zu schreiben. Als Preis dafür verlangt er für die erste Seite 0,001 Cent, für jede weitere jeweils das Eineinhalbfache der vorhergehenden Seite. Insgesamt sind 50 Seiten zu schreiben.
Wie hoch wäre der Gesamtpreis in € für die Diplomarbeit und der Durchschnittspreis je Seite?

3.6-11 Aufgabe

Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Zahlenfolgen für $k \to \infty$:

a) $a_k = \dfrac{k+1}{k^2 - k + 4}$ b) $a_k = \dfrac{k^2+1}{2k^2 - k + 4}$ c) $a_k = \dfrac{k^3+1}{k^2 + 2k - 4}$

3.6-12 Aufgabe

Die allgemeinen Glieder einer Reihe werden durch die folgenden Glieder beschrieben:

a) $a_k = \dfrac{1}{k^2}$ b) $a_k = \dfrac{k}{2^k}$ c) $a_k = \dfrac{2^k}{k^2}$

d) $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k+1}$

Welche der Reihen ist konvergent?
Welche ist eine alternierende Reihe?

3.6-13 Aufgabe

Ein Unternehmen erhält den Auftrag, 3 200 Computer herzustellen. In der ersten Arbeitswoche werden 50 Stück produziert. Diese Stückzahl soll in den folgenden Wochen um 20 Stück je Woche erhöht werden.

a) Nach wie vielen Wochen ist der Auftrag erfüllt?
b) Wie viel Stück werden in der letzten Woche hergestellt?

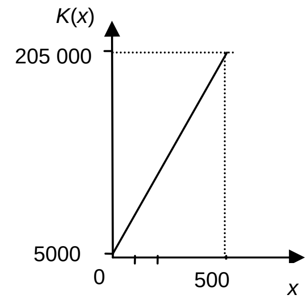
Lösungen

3.5-1 $f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(-1) = 20$ Lösungsweg

3.5-2
Lösungshinweis: Gewinn = Erlös – Kosten
Bezeichnungen: x - Produktionsumfang in Stück
$K(x)$ - Kosten (in €) in Abhängigkeit von x

a) $K(x) = 5\,000 + 400x$

b)

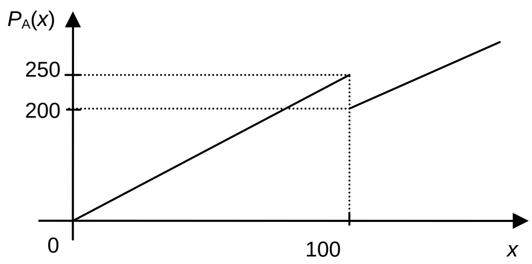


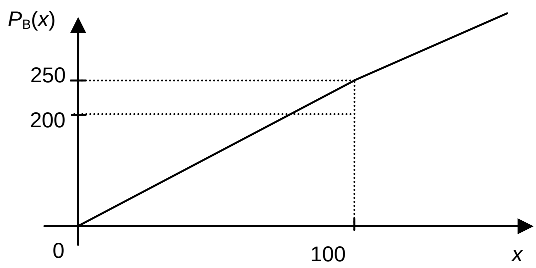
c) 500 Geräte

3.5-3

a) A: $P_A(x) = \begin{cases} 2{,}5 \cdot x & \text{für } 0 \le x < 100 \\ 2 \cdot x & \text{für } 100 \le x < \infty \end{cases}$ B: $P_B(x) = \begin{cases} 2{,}5 \cdot x & \text{für } 0 \le x < 100 \\ 50 + 2 \cdot x & \text{für } 100 < x < \infty \end{cases}$

b)





3.5-4

a) $(-\infty, \infty)$, $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{3}$, $(-\infty, \infty)$ b) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, $y = \dfrac{1}{x-3}$, $\mathbf{R} \setminus \{3\}$,

c) $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ d) $(-\infty, \infty)$, $y = \dfrac{1}{3} \ln x$, $(0, \infty)$

e) $(1, \infty)$, $y = e^x + 1$, $(-\infty, \infty)$

3.5-5

a) $x(K) = 125 - \dfrac{K}{40}$ b) x abhängig, K unabhängig c) $k(x) = \dfrac{5\,000}{x} + 40$

3-5.1 Lösungsweg

$f(0) = 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

$f(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 20$

Hinweis: Beachte $(-1)^4 = (-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$

Lösungen

3.6-1 a) $a_1 = 2,\ a_k = a_{k-1} + 2;$ $a_k = 2 + 2(k-1) = 2k,\ k = 1, 2, \ldots$
b) $a_1 = 1,\ a_k = a_{k-1} + 3;$ $a_k = 1 + 3(k-1),\ k = 1, 2, \ldots$
c) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = 2 \cdot a_k;$ $a_k = 2^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$

3.6-2 $a_1 = -10,\quad a_k = a_{k-1} + 15;$ $a_k = -10 + 15(k-1),\ k = 1, 2, \ldots;$ $-10,\ 5,\ 20,\ 35,\ 50,\ 65$

3.6-3 $a_1 = 10,\quad a_k = a_{k-1} - 5;$ $a_k = 10 - 5(k-1),\ k = 1, 2, \ldots;$ $10,\ 5,\ 0,\ -5,\ -10,\ -15$

3.6-4 $d = 4,\quad a_k = a_{k-1} + 4;$ $a_k = 4 + 4(k-1),\ k = 1, 2, \ldots;$ $4,\ 8,\ 12,\ 16$

3.6-5 $q = -2,\quad a_k = -2 \cdot a_{k-1};$ $a_k = (-2)^{k-1};$ $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32$

3.6-6 $a_1 = 10,\quad a_k = 3 \cdot a_{k-1};$ $a_k = 10 \cdot 3^{k-1};$ $10,\ 30,\ 90,\ 270,\ 810,\ 2\,430$

3.6-7 $q = \sqrt[3]{4},\quad a_k = \sqrt[3]{4} \cdot a_{k-1};$ $a_k = 5 \cdot (\sqrt[3]{4})^{k-1};$ $5,\ 5 \cdot \sqrt[3]{4},\ 5 \cdot \sqrt[3]{16},\ 20$

3.6-8
a) 3.6-1 a) 420 b) 590 c) 1 048 575
3.6-2 2 650 3.6-3 – 750 3.6-4 840
3.6-5 – 349 525 3.6-6 17 433 922 000 3.6-7 87 846,908
b) 3.6-5 ist alternierend

3.6-9 a) 0,512 m b) 524,288 m c) 536,87 km

Lösungen

3.6.10 12 752,43 €, 255,05 €

3.6.11 a) 0 b) ½ c) ∞

3.6.12 a) konvergent b) konvergent c) divergent
d) konvergent, alternierend

3.6.13 a) 16 Wochen b) 350 Stück Lösungsweg

3.6-13 Lösungsweg
(Summenformel der arithmetischen Reihe)

$\sum_{i=1}^{n} a_i = 3\,200 \qquad a_1 = 50, \qquad d = 20$

$3\,200 = n\left(50 + \frac{n-1}{2}\cdot 20\right)$

$3\,200 = 50n + 10n^2 - 10n$

$n^2 + 4n - 320 = 0$

$n_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+320} = -2 \pm \sqrt{324} = -2 \pm 18$

$n_1 = 16, \qquad n_2 = -20$ (unsinnig).

a) Nach 16 Wochen ist der Auftrag erledigt.
b) $a_{16} = a_1 + (16-1)d = 50 + 15 \cdot 20 = 350$ (Stück)

Grundlagen der Finanzmathematik: Einfache Verzinsung

4.1-1 Aufgabe
Wie hoch sind die Zinsen für einen Betrag von 5 000 € für die Zeit vom 3. März bis 20. Oktober des gleichen Jahres bei einer Verzinsung von 5 % p. a.?

4.1-2 Aufgabe
Ein Kredit von 4 600 € ist 90 Tage in Anspruch genommen worden.
Die Zinsen betragen 132,25 €. Mit wie viel Prozent pro Jahr wurde der Kredit verzinst?

4.1-3 Aufgabe
Wie hoch ist ein Kredit, für den in einem halben Jahr bei 11 % Jahreszinsen 1 237,50 € Zinsen gezahlt werden müssen?

4.1-4 Aufgabe
In welcher Zeit entstehen bei einer Spareinlage von 2 000 € bei 7 % jährlicher Verzinsung Zinsen in der Höhe von 93,33 €?

4.1-5 Aufgabe
In 9 Monaten ist eine Forderung von 5 000 € fällig. Wie viel ist bei 6 % jährlicher Verzinsung sofort für diese Schuld zu begleichen?

4.1-6 Aufgabe
Ein erfolgreicher Unternehmer möchte zur Förderung von Talenten jährlich einen Preis von 100 000 € stiften. Dazu will er ein gesondertes Konto einrichten. Wie viel Geld muss er einmalig darauf einzahlen, wenn die Zinsen 5,5 % p. a. betragen und der Preis ewig gestiftet werden soll?

Grundlagen der Finanzmathematik: Zinseszinsen, Rentenrechnung

4.2-1 Aufgabe
Ein Kapital K_0 wird für n Jahre zu einem Zinssatz p. a. von p angelegt. (Zinseszinsrechnung)
a) Berechnen Sie K_{10} mit $K_0 = 10\,000$ € und $p = 7{,}25\ \%$ ($n = 10$).
b) Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital bei $p = 7{,}25\ \%$ verdreifacht?
c) Wie groß muss der Zinssatz sein, damit sich das Kapital in 10 Jahren verdreifacht?

4.2-2 Aufgabe
Frau X überweist auf einen Sparvertrag zu Beginn jeden Jahres 1 200 €. Es ist ein Zinssatz von 5 % p. a. vereinbart. Wie groß ist das Kapital am Tage der 6. Einzahlung?

4.2-3 Aufgabe
Die Hausbank verzinst die bei ihr stehenden Guthaben vom Tage der Einzahlung an mit 5,5 % p. a. Herr L. eröffnet dort ein Konto.
a) Herr L. zahlt 10 Jahre lang zu Beginn eines jeden Jahres 12 000 € auf sein Konto ein. Wie hoch wird sein Kapital nach 10 Jahren?
b) Um welchen Betrag erniedrigt sich sein Kapital am Ende des 10. Jahres, wenn er zu Beginn des 5. Jahres einmal mit der Einzahlung aussetzt?

4.2-4 Aufgabe
Frau M. hat am Anfang des Jahres 2000 ein Konto eröffnet und darauf 4 000 € eingezahlt. Der jährliche Zinssatz betrage 4,25 %. Jeweils zu Beginn der folgenden Jahre sollen 800 € auf das Konto eingezahlt werden.
a) Wie hoch wird der Kontostand nach der Einzahlung im Jahre 2020 sein?
b) Wie hoch ist der Betrag, der durch Zinsen und Zinseszinsen entstanden ist?
c) Welches Kapital hätte am Anfang des Jahres 2000 einmalig angelegt werden müssen, um bei einer Verzinsung von 4,25 % p. a. zu Beginn des Jahres 2020 über den gleichen Betrag wie unter a) zu verfügen?

Grundlagen der Finanzmathematik: Zinseszinsen, Rentenrechnung

4.2-5 Aufgabe
Herr M. vereinbart den folgenden Rentensparvertrag mit seiner Bank. Er zahlt jährlich 3 600 € ein. Der Zinssatz betrage 6 % p. a.

a) Nach 25 Jahren soll die Auszahlung erfolgen. Wie hoch wird diese sein?
b) Wie viele Jahre müsste Herr M. einzahlen, um ein Endkapital von 250 000 € zu erhalten?

4.2-6 Aufgabe
Herr R. beschließt das Rauchen aufzugeben und er zahlt die monatlich eingesparten Kosten von 80 €

a) zu Beginn
b) zum Ende

jeden Monats auf ein Konto, das mit 5 % jährlich verzinst wird. Auf dem Konto befinden sich bereits 1 000 €. Auf welchen Betrag wird das Konto nach 30 Jahren angestiegen sein?

4.2-7 Aufgabe
Für eine Zahlungsverpflichtung bestehen zwei Alternativen:

a) Es werden sofort 2 020,- € bezahlt.
b) Es werden sofort 700,- € bezahlt und der gleiche Betrag nach Ablauf von einem sowie von zwei Jahren.

Welche der Alternativen ist für den Zahlenden günstiger, wenn ein Zinssatz von 5 % jährlich unterstellt wird?

4.2-8 Aufgabe
Ein Sparer eröffnet ein Konto und zahlt jährlich zu Beginn jeden Jahres 1 200 € ein.
Wie viel Jahre müsste er einzahlen, um bei einem jährlichen Zinssatz von 7 % ein Endkapital von 100 000 € zu erreichen?

4.2-9 Aufgabe
Herr A. hat sein Haus verkauft und 500 000 € erhalten.
Dieses Geld zahlt er auf ein Konto ein, das jährlich mit 5,6 % verzinst wird. 20 Jahre lang möchte er zu Beginn jeden Monats einen gleichbleibenden Betrag abheben, bis das gesamte Kapital verbraucht ist.
Wie hoch wird dieser sein, wenn eine gemischte Verzinsung vorausgesetzt wird?

Grundlagen der Finanzmathematik: Tilgungsrechnung

4.4-1 Aufgabe
Frau Z. will ihr Haus verkaufen und hat zwei Angebote vorliegen:
a) Interessent A bietet 5 jährliche Raten zu 30 000 €
b) Interessent B bietet 10 jährliche Raten zu 16 500 €
Die erste Rate ist sofort bei Verkauf fällig.
Welches Angebot sollte Frau Z. wählen, wenn ein Zinssatz von 4,5 % p. a. zugrunde gelegt wird?

4.4-2 Aufgabe
Ein Unternehmen will Schulden in Höhe von 7 000 000 € in 7 gleich großen Raten (jeweils am Ende eines Geschäftsjahres) tilgen.
Wie groß sind die Raten, wenn für die Schulden ein Zinssatz von 7,5 % p. a. angenommen wird?

4.4-3 Aufgabe
Ein Darlehen von 100 000 € soll nachschüssig in monatlichen gleich hohen Raten in 30 Jahren zurückgezahlt werden. Die Darlehenszinsen betragen $p = 9$ % p. a. Berechnen Sie jeweils die Raten:
a) bei gemischter Verzinsung
b) bei monatlicher Verzinsung mit einem Zinssatz von $p/12$

4.4-4 Aufgabe
Familie M. möchte ein Eigenheim bauen und benötigt dafür einen Kredit von 125 000 €.
Wie hoch sind die monatlichen gleich hohen Rückzahlungen, wenn
a) die Laufzeit des Kredites 30 Jahre beträgt,
b) die Laufzeit des Kredites 50 Jahre beträgt?
Es wird eine vorschüssige Zahlweise mit monatlicher Verzinsung mit 1/12 der Jahreszinsen von 11 % angenommen.

4.4-5 Aufgabe
Für den Kauf eines Autos im Wert von 20 000 € stehen zwei Alternativen zur Verfügung:
a) Sofortige Zahlung von 5 000 €, restliche Raten jeweils am Ende der 5 folgenden Jahre nach dem Kauf.
b) Die erste der 5 Raten wird erst am Ende des 2. Jahres fällig.
Wie hoch sind in beiden Fällen die jährlichen gleichen Raten, wenn für die Finanzierung 3,9 % p. a. Zinsen verlangt werden?

4.4-6 Aufgabe
Einem Landwirt wird ein Kredit von 100 000 € zu gesprochen, bei 10 % Zinsen p. a. und vollständiger Auszahlung. Dieser Kredit ist in 10 Jahren nachschüssig zurückzuzahlen.
Stellen Sie einen Tilgungsplan auf:
a) für die Ratentilgung
b) für die Annuitätentilgung

4.4-7 Aufgabe
Für den Kauf eines Autos werden folgende Alternativen angeboten.
Welches Angebot für den Kauf einer Ware ist günstiger, wenn die Zinsen 0,5 % monatlich betragen?
a) Barkauf zum Preis von 10 000 €
b) Ratenkauf: sofortige Anzahlung von 500 €, Rest in 10 Raten zu 1 000 € jeweils am Monatsende
c) Ratenkauf ohne Anzahlung in 36 Monatsraten zu 300 €

Kapitel 4	Abschnitt 4.1		Aufgaben ◄	

Lösungen

4.1-1 a) 157,64 € b) 158,22 €

4.1-2 11,5 %

4.1-3 22 500 €

4.1-4 240 Tage bzw. 243,3 Tage bei taggenauer Verzinsung

4.1-5 4 784,69 €

4.1-6 1 818 181,82 €

Lösungswege 4.1-1 bis 4.1-6

4.1-1 Lösungsweg

a) Wird mit 30 Tagen je Monat gerechnet, so entstehen 227 Zinstage.

$$T = (10 - 3)\cdot 30 + 20 - 3 = 227$$

$$Z = i \cdot \frac{T}{360} \cdot K_0 = 0{,}05 \cdot \frac{227}{360} \cdot 5\,000 = 157{,}64 \text{ €}$$

b) Eine taggenaue Verzinsung muss 331 Tage berücksichtigen

$$Z = i \cdot \frac{T}{365} \cdot K_0 = 0{,}05 \cdot \frac{231}{365} \cdot 5\,000 = 158{,}22 \text{ €}$$

4.1-2 Lösungsweg

$$i = \frac{360}{T}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) = \frac{360}{90}\left(\frac{4\,732{,}25}{4\,600} - 1\right) = 0{,}115\,, \quad p = 11{,}5\ \%$$

4.1-3 Lösungsweg

$$Z = i \cdot \frac{T}{360} \cdot K_0\,,\;\; K_0 = \frac{Z \cdot 360}{T \cdot i} = 22\,500 \text{ €}$$

4.1-4 Lösungsweg

$$T = \frac{Z \cdot 360}{K_0 \cdot i} = 240 \text{ Tage} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{Z \cdot 365}{K_0 \cdot i} = 243{,}3 \text{ Tage bei taggenauer Verzinsung}$$

4.1-5 Lösungsweg

Gesucht ist der Barwert

$T = 270$ (Monat zu je 30 Tagen)

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot \frac{T}{360}} = \frac{5\,000}{1 + 0{,}06 \cdot \frac{270}{360}} = 4\,784{,}69 \text{ €}$$

4.1-6 Lösungsweg

Gesucht ist das Anfangskapital bei vorgegebenen Zinsen

$$p \cdot K_0 = 100\,000,\;\; K_0 = \frac{100\,000}{0{,}055} = 1\,818\,181{,}82 \text{ €}$$

Lösungen

4.2-1 a) 20 135,99 € b) 15,7 Jahre (15 Jahre und 256 Tage)
c) 11,61%

4.2-2 8 162,30 €

4.2-3 a) 163 001,98 b) 16 546,11 €

4.2-4 a) 33 645,63 € b) 13 645,63 € c) 14 635,49 €

Lösungswege 4.2-1 bis 4.2-4

4.2-5 a) 209 362,98 € b) 27,38 Jahre (27 Jahre und 139 Tage)

4.2-6 a) 69 830,65 b) 69 564,89 €

4.2-7 Vergleich der Barwerte
a) 2 020 € b) 2 001,59 € b) ist günstiger

4.2-8 27,55 Jahre (27 Jahre und 201 Tage)

4.2-9 3 412,12 €

Lösungswege 4.2-5 bis 4.2-8

4.2-1 Lösungsweg

a) $K_{10} = (1+i)^{10} \cdot K_0 = 1{,}0725^{10} \cdot 10\,000 = 20\,135{,}99$ €

b) $3K_0 = (1+i)^n \cdot K_0 \quad \Big| : K_0$

$(1+i)^n = 3 \quad \Big| \ln \ldots$

$n \cdot \ln(1+i) = \ln 3$

$n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}0725} = 15{,}70$

Eine Verdreifachung des Kapitals erfolgt nach 15,7 Jahren (15 Jahre und 256 Tage).

c) $p = \left(3^{\frac{1}{10}} - 1\right) \cdot 100 \approx 11{,}61\%$

4.2-2 Lösungsweg

gegeben: $n = 5$, $K_0 = 0$, $q = 1 + i = 1{,}05$; vorschüssig und eine Einzahlung

$$E + K_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q \cdot E + E = 6\,962{,}30 + 12\,000 = 8\,162{,}30 \text{ €}$$

4.2-3 Lösungsweg

Rentenendwert

gegeben: $q = 1 + i = 1{,}055$, $n = 10$, $E = 12\,000$, vorschüssig

a) $R_{10} = \dfrac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q \cdot E = 163\,001{,}98$ €

b) $12000 \cdot q^6 = 16\,546{,}11$ €

4.2-4 Lösungsweg

a) Raten-Renten-Formel

gegeben: $n = 20$, $i = 0{,}0425$, $K_0 = 4\,000$, $E = 800$,

(nachschüssig, da die erste regelmäßige Einzahlung von 800 € erst nach Ablauf eines Jahres erfolgt)

$$K_n = q^n K_0 + \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot E = 33\,645{,}63 \text{ €}$$

b) Einzahlung: $4\,000 + 20 \cdot 800 = 20\,000$ €,
Damit sind 13 645,63 € durch Zinsen und Zinseszinsen entstanden.

c) Gesucht ist der Barwert: $B = \dfrac{33\,645{,}63}{q^{20}} = 14\,635{,}49$ €

4.2-5 Lösungsweg

a) $n = 25,\quad E = 3\,600,\quad p = 0{,}06;\quad$ vorschüssig

$$R_{25} = \frac{q^{25}-1}{q-1}\cdot q\cdot E = 209\,362{,}98\ €$$

b) Umstellen nach n

$$K_n = \frac{q^n-1}{q-1}\cdot q\cdot E = 250\,000,\ \ (q^n-1)q\cdot E = 250\,000(q-1)$$

$$q^n - 1 = 250\,000(q-1)/(E\cdot q),\ \ q^n = 250\,000(q-1)/(E\cdot q)+1$$

$$n = \frac{\lg\left(250\,000(q-1)/(E\cdot q)+1\right)}{\lg q} = 27{,}38\ \text{Jahre}\quad (27\ \text{Jahre und } 139\ \text{Tage})$$

4.2-6 Lösungsweg

a) $K_{30} = 1{,}05^{30}\cdot 1000 + \dfrac{1{,}05^{30}-1}{0{,}05}\cdot\left[12+0{,}05\cdot\dfrac{13}{2}\right]\cdot 80 = 69\,830{,}65\ €$

b) $K_{30} = 1{,}05^{30}\cdot 1000 + \dfrac{1{,}05^{30}-1}{0{,}05}\cdot\left[12+0{,}05\cdot\dfrac{11}{2}\right]\cdot 80 = 69\,564{,}89\ €$

4.2-7 Lösungsweg

Ein Vergleich der Zahlung kann zum Zeitpunkt 0 erfolgen (Barwert).

a) Barwert: $B = 2\,020\ €$

b) $B = 700 + \dfrac{700}{1{,}05} + \dfrac{700}{1{,}05^2} = 2\,001{,}59\ €$, diese Zahlweise ist günstiger.

4.2-8 Lösungsweg

$$100\,000 = K_n = \frac{q^n-1}{q-1}\cdot q\cdot E$$

$$K_n\cdot(q-1) = \left(q^n-1\right)\cdot q\cdot E$$

$$q^n - 1 = \frac{K_n(q-1)}{q\cdot E}$$

$$q^n = \frac{K_n(q-1)}{q\cdot E}+1$$

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{K_n(q-1)}{q\cdot E}+1\right)}{\ln q} = \frac{\ln\left(\dfrac{100\,000\cdot 0{,}07}{1{,}07\cdot 1\,200}+1\right)}{\ln 1{,}07} = 27{,}55\ ;\quad n = 27{,}55\ \text{Jahre}\quad (27\ \text{Jahre und } 201\ \text{Tage})$$

Kapitel 4	Abschnitt 4.4		Aufgaben ◄	

Lösungen

4.4-1 a) 213 728,61 € b) 211 879,45 €

4.4-2 1 321 602,21 €

4.4-3 a) 779,00 € b) 804,62 €

4.4-4 a) 1 179,59 € b) 1 140,20 €

4.4-5 a) 3 359,95 € b) 4 654,64 €

4.4-6 Annuität 16 274,54 Tilgungspläne

4.4-7 c) ist am günstigsten

4.4-6 Lösungsweg

a) Ratentilgung: Die Tilgungsrate beträgt $Q = \frac{K_0}{n} = \frac{100\,000}{10} = 10\,000$ €

b) Berechnung der Annuität nachschüssig:

$$A^{(N)} = q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} \cdot K_0 = 1{,}1^{10} \cdot \frac{0{,}1}{1{,}1^{10} - 1} \cdot 100\,000 = 16\,274{,}54 \text{ €}$$

Ratentilgung | Annuitätentilgung

Jahr	Schulden zu Beginn d. J.	Zinsen	Annuität	Restschuld	Jahr	Schulden zu Beginn d. J.	Zinsen	Tilgung	Restschuld
1	100 000	10 000	20 000	90 000	1	100 000,00	10 000,00	6 274,54	93 725,46
2	90 000	9 000	19 000	80 000	2	93 725,46	9 372,55	6 901,99	86 823,47
3	80 000	8 000	18 000	70 000	3	86 823,47	8 882,35	7 592,19	79 231,28
4	70 000	7 000	17 000	60 000	4	79 231,28	7 923,13	8 351,41	70 879,87
5	60 000	6 000	16 000	50 000	5	70 879,87	7 087,99	9 186,55	61 693,32
6	50 000	5 000	15 000	40 000	6	61 693,32	6 169,33	10 105,21	51 588,11
7	40 000	4 000	14 000	30 000	7	51 588,11	5 158,81	11 115,73	40 472,38
8	30 000	3 000	13 000	20 000	8	40 472,38	4 047,24	12 227,30	28 245,08
9	20 000	2 000	12 000	10 000	9	28 245,08	2 824,51	13 450,03	14 795,05
10	10 000	1 000	11 000	0	10	14 795,05	1 479,50	14 795,04	0,01

Funktionen mit einer reellen Variablen: Grenzwert von Funktionen

5.1-1 Aufgabe
Ermitteln Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion $f(x)$ an den Stellen x_0 und x_1:

a) $f(x) = \dfrac{6x+12}{x^2-4}$ für $x_0 = 2$ und $x_1 = -2$

b) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2-4}$ für $x_0 \to \infty$ und $x_1 \to -\infty$

c) $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^2-4}$ für $x_0 \to \infty$ und $x_1 \to -\infty$

5.1-2 Aufgabe
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x^2-10x-4}{x^2-4}$

Funktionen mit einer reellen Variablen: Stetigkeit

5.2-1 Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 auf Stetigkeit, und geben Sie gegebenenfalls eine stetige Ersatzfunktion an:

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ 3x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ für $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-x} & \text{für } x < 2 \\ |x-4| & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$ für $x_0 = 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x+4}$ für $x_0 = -4$

5.2-2 Aufgabe

Ein Energieerzeuger bietet seinen Abnehmern das folgende Tarifmodell an:

	Grundpreis in €	Mengenpreis in €/kWh
Kleinverbraucher bis 2 400 kWh	30	0,0990
Normalverbraucher von 2 400 bis 5 000 kWh	120	0,0615
Großverbraucher über 5 000 kWh	165	0,0525

Ist die Funktion, die den Gesamtpreis liefert, stetig?

5.2-3 Aufgabe

Für den Kauf von Büromaterial wird Mengenrabatt gewährt.

Modell A: Werden weniger 100 Stück geordert, ist ein Preis von 2,80 € je Stück zu zahlen, ab 100 Stück beträgt der Preis 2,50 €.

Modell B: Bis zu 100 Stück ist ein Preis von 2,80 € je Stück zu zahlen, jedes darüber hinaus gehende Stück kostet 2,50 €.

a) Stellen Sie beide Sachverhalte mathematisch durch je eine Funktion dar.

b) Untersuchen Sie die Stetigkeit der beiden Funktionen.

(vergleiche auch Aufgabe 3.5-3)

Funktionen mit einer reellen Variablen: Ableitung einer Funktion

5.3-1 Aufgabe

Geben Sie die erste Ableitung $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ für folgende Funktionen $y = f(x)$ an:

a) $y = 3 + 5x^2 + x^5$

b) $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x > 0$

c) $y = x^4 \cdot \mathrm{e}^x$

d) $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^4}, \quad x \neq 0$

e) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad -1 < x \leq 1$

f) $y = \ln\sqrt{1-x^2} + \mathrm{e}^x \cos x, \quad -1 \leq x \leq 1$

g) $y = \sqrt[x]{x^2 - 1}, \quad -1 < x < 1, \; x \neq 0$

5.3-2 Aufgabe

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen nach der vorgegebenen Variablen!

a) $M(P) = c \cdot P^{\eta}, \quad c, \eta$ konstant

b) $K(u) = \frac{1 - a \cdot u}{u}, \quad a$ konstant

c) $V(Z) = \frac{F - Z}{C}, \quad F, C$ konstant

d) $V(C) = \frac{F - Z}{C}, \quad F, Z$ konstant

Funktionen mit einer reellen Variablen: Anwendung der Ableitung

5.4-1 Aufgabe

Zu $L(x)=\dfrac{(x-1)^4}{4}+2$ ist die prozentuale Änderung von $L(x)$ zu bestimmen, wenn $x = 5$ um 2 % erhöht wird.
Verwenden Sie zur näherungsweisen Berechnung das Differential.

5.4-2 Aufgabe

Wie lautet die relative Elastizität der Funktion $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$ an der Stelle $x_0 = 4$?

5.4-3 Aufgabe

Eine Kostenfunktion $K(x)$ hängt von dem Produktionsvolumen x in folgender Weise ab:

$$K(x)=x^2+3x-\frac{1}{x}$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fehlerrechnung die Änderung von K, wenn bei einem Produktionsvolumen von 10 ME Schwankungen bis 5 % möglich sind.
b) Wie groß ist die relative Änderung?
c) Wie groß ist die relative Elastizität an der Stelle $x = 10$?

5.4-4 Aufgabe

Berechnen Sie mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens die Nullstellen der folgenden Gleichungen auf drei Stellen hinter dem Komma genau:

a) $x^2-\ln x-2=0$ b) $10^x-x-2=0$ c) $x^4+x-1=0$
d) $x+\mathrm{e}^x=0$

5.4-5 Aufgabe

Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von BERNOULLI-L´HOSPITAL die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot x}{\tan 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

Funktionen mit einer reellen Variablen: Untersuchung von Funktionen

5.5-1 Aufgabe

Die Produktionskosten eines Gutes (in T€) sind durch folgende Funktion gegeben:

$$K(x) = \frac{x}{120} - 0{,}5 + \frac{60}{2x + 100}$$

a) Ermitteln Sie die Grenzproduktionskosten.
b) Für welche Ausbringmenge x sind die Produktionskosten minimal?
c) Wie lautet die relative Produktionskostenelastizität bei $x = 24$?
d) Wie ändern sich näherungsweise die Produktionskosten (absolut und relativ), wenn die Ausbringmenge $x = 24$ um 3 % erhöht wird?

5.5-2 Aufgabe

Gegeben sind eine Kostenfunktion (in T€)

$$K(x) = x^3 - 24x^2 + 50x + 70,$$

die Produktionsmenge ist auf 12 ME beschränkt ($0 \le x \le 12$),
und eine Erlösfunktion

$$E(x) = 50x$$

in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x.

a) Wie lautet die Grenzgewinnfunktion?
b) Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

Funktionen mit einer reellen Variablen: Integralrechnung – Unbestimmtes Integral

5.6.1-1 Aufgabe
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int(3x^2-4x+5)\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{ax^4}{b}\mathrm{d}x$ c) $\int 2\sqrt{a}\,\mathrm{d}x$

d) $\int 3\sqrt{a}\,\mathrm{d}a$ e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\pi^3}$ f) $\int gt\,\mathrm{d}t$

g) $\int x^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$ h) $\int \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ i) $\int (x^2+\frac{1}{x^2})\,\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{x^4-x^2-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

5.6.1-2
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int\cos(4x-1)\,\mathrm{d}x$ b) $\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\int\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$ f) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+2}}\mathrm{d}x$

5.6.1-3
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int x\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ c) $\int\ln x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^3\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ f) $\int\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

5.6.1-4
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

b) $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\mathrm{d}x$ b) $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$ c) $\int\frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10}\mathrm{d}x$

d) $\int\frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$

Kapitel 5	Abschnitt 5.6.2	▶ Lösungen		▲ Aufgaben ▼

Funktionen mit einer reellen Variablen: Integralrechnung – Bestimmtes Integral

5.6.2-1 Aufgabe

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+3}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{6x^2-x+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

Funktionen mit einer reellen Variablen: Integralrechnung – Uneigentliche Integrale

5.6.3-1 Aufgabe
Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} dx$ b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$ c) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

d) $\int\limits_0^{1} \frac{x \; dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x}$

Funktionen mit einer reellen Variablen: Integralrechnung – Numerische Integration

5.6.5-1 Aufgabe
Berechnen Sie das folgende Integral näherungsweise mit der Sehnen-Trapezregel und mit der SIMPSON-Regel:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}, \quad \text{mit} \quad h = 1/4$$

5.6.5-2 Aufgabe
Das folgende Integral ist zu lösen:

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{4+x}$$

a) analytisch
b) näherungsweise mit der Sehnen-Trapezregel (n =10) und mit der SIMPSON-Regel (n =10)

5.6.5-3 Aufgabe
Lösen Sie näherungsweise das Integral:

$$\int_1^3 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

a) mit der Sehnen-Trapezregel ($n = 10$)
b) mit der SIMPSON-Regel ($n = 10$)

5.6.5-4 Aufgabe
Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Sehnen-Trapezregel und der SIMPSON-Regel.
Hinweis: Benutzen Sie für die Rechnung $n = 8$ Teilintervalle.

Funktionen mit einer reellen Variablen: Differenzialgleichungen

5.7-1 Aufgabe
Es sind sämtliche Lösungen der folgenden Differentialgleichungen zu bestimmen:

a) $y' = xy$

b) $y' = y \cdot \sin x$

c) $y' - \dfrac{x}{1+x^2} \cdot y = 0$

5.7-2 Aufgabe
Es sind folgende Anfangswertprobleme zu lösen. Machen Sie die Probe.

a) $(1+\mathrm{e}^x) \cdot y \cdot y' = \mathrm{e}^x$ mit $y(1) = 1$

b) $\mathrm{e}^y \cdot (1+x^2) \cdot y' - 2x \cdot (1+\mathrm{e}^y) = 0$ mit $y(0) = 0$

5.7-3 Aufgabe
Es sind folgende Anfangswertprobleme zu lösen:

a) $y' - \dfrac{y}{x} = x \cdot \cos x$ mit $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $y' + \tan x \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$ mit $y(\pi) = 1$

c) $y' - x \cdot y = 2x$ mit $y(0) = 2$

d) $x \cdot y' + 2y = 3x$ mit $y(1) = 2$

e) $y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$ mit $y(0) = \dfrac{1}{5}$

5.7-4 Aufgabe
Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differenzialgleichung:

$$y'' + y' - 2y = 2x \quad \text{mit } y(0) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

Lösungen

5.1-1 a) Für $x_0 = 2$: linksseitig $-\infty$, rechtsseitig $+\infty$; für $x_1 = -2$: jeweils $-1{,}5$
b) jeweils 0
c) 6

5.1-2 a) $\frac{1}{8}$
b) 3,5

Lösungen

5.2-1 a) stetig b) nicht stetig
c) stetig d) stetig für $f(-4) = -8$

5.2-2 Die Funktion ist stetig.

5.2-3 Modell A: a) $P_A(x) = \begin{cases} 2{,}8x \text{ für } 0 \le x < 100 \\ 2{,}5x \text{ für } 100 \le x < \infty \end{cases}$ b) $P_A(x)$ ist bei $x = 100$ nicht stetig.

Modell B: a) $P_B(x) = \begin{cases} 2{,}8x \text{ für } 0 \le x \le 100 \\ 30 + 2{,}5x \text{ für } 100 < x < \infty \end{cases}$ b) $P_B(x)$ ist bei $x = 100$ stetig.

Lösungen

5.3-1

a) $y' = 10x + 5x^4$

b) $y' = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x}} - \dfrac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$

c) $y' = \mathrm{e}^x (4x^3 + x^4)$

d) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x (x-4)}{x^5}$

e) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$

f) $y' = \dfrac{-x}{1-x^2} + \mathrm{e}^x (\cos x - \sin x)$

g) $y' = \left(\sqrt[x]{x^2 - 1}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\ln(x^2 - 1) + \dfrac{2}{x^2 - 1}\right)$

5.3-2

a) $M'(p) = \eta \cdot c \cdot P^{\eta - 1}$

b) $K'(u) = -\dfrac{1}{u^2}$

c) $V'(Z) = \dfrac{-1}{C}$

d) $V'(C) = -\dfrac{1}{C^2}(F - Z)$

Lösungen

5.4-1 9,7 %

5.4-2 – 3

5.4-3 a) 11,5 b) 0,0886 c) 1,77

5.4-4 a) 0,138; 1,564 b) – 1,99; 0,376 c) – 1,221; 0,725
d) – 0,567

5.4-5 a) 1,5 b) 2,5 c) 1
d) e^a

Lösungen

5.5-1 a) $K'(x) = \frac{1}{120} - \frac{120}{(2x+100)^2}$ b) $x = 10$ ME

c) 0,65 d) 0,002; 0,02 ≙ 2 %

5.5-2 a) $G'(x) = -3x^2 + 48x$ b) $G(12) = 1\,658$

Lösungen

5.6.1-1

a) $x^3 - 2x^2 + 5x + C$ b) $\frac{ax^5}{5b} + C$ c) $2x\sqrt{a} + C$

d) $2\sqrt{a^3} + C$ e) $\frac{x}{2\pi^3} + C$ f) $\frac{gt^2}{2} + C$

g) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + C$ h) $\frac{3}{13} \cdot x^{\frac{13}{3}} + C = \frac{3x^5}{13\sqrt[3]{x^2}} + C$ i) $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

j) $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{x} + C$

5.6.1-2 (Substitutionsmethode)

a) $\frac{1}{4}\sin(4x-1) + C$ b) $\frac{-e^{-2x}}{2} + C$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$

d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$ e) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C$ f) $\frac{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}{2} + C$

5.6.1-3 (partielle Integration)

a) $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C$ b) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C$ **Hinweis**: Zweimalige partielle Integration

c) $(\ln x - 1)x + C$ **Hinweis**: $u' = 1,\ v = \ln x$

d) $-(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + C$ e) $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C$

f) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$ **Hinweis**: $u' = 1,\ v = \cos(\ln x)$, weiter entsprechend b)

5.6.1-4 (Partialbruchzerlegung)

a) $\ln\left|\frac{(x-1)^4 \cdot (x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$ Lösungsweg

b) $2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + C$ Lösungsweg

c) $2x - \frac{3}{2}\ln\left|x^2 + 6x + 10\right| + \arctan(x+3) + C$ Lösungsweg

d) $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2 + x + 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + C$ Lösungsweg

5.6.1-4 a) Lösungsweg

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-7}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x-4}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x-1)^4\cdot(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$$

Ansatz: $\dfrac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{x-4}$ | Multiplikation mit dem Hauptnenner

$2x^2+41x-91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3)$ | Einsetzen der Nullstellen

$x=1:$	$-48=-12A$	$A=4$
$x=-3:$	$-196=28B$	$B=-7$
$x=4:$	$105=21C$	$C=5$

Kapitel 5	Abschnitt 5.6.1		Aufgaben ◄	

5.6.1-4 b) Lösungsweg

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + C = 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + C$$

Ansatz: $\frac{x+2}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ | Multiplikation mit dem Hauptnenner

$x+2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$ | Einsetzen der Nullstellen und eines weiteren geeigneten Wertes

$x = 0:$ $2 = A$ $A = 2$

$x = 1:$ $3 = C$ $C = 3$

$x = 2:$ $4 = A + 2B + 2C$ $2B = 4 - 2 - 6$ $B = -2$

5.6.1-4 c) Lösungsweg

$$\int \frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = 2x - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + \arctan(x+3) + C$$

$$(2x^2+9x+12):(x^2+6x+10) = 2 + \frac{-3x-8}{x^2+6x+10}$$

Ansatz: $\dfrac{-3x-8}{x^2+6x+10} = \dfrac{Ax+B}{x^2+6x+10} \quad \Big| \; A=-3\,,\;\; B=-8\,,\;\; p=6\,,\;\; q=10$

$$\int \frac{-3x-8}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + \frac{-16+18}{\sqrt{40-36}}\arctan\frac{2x+6}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + \arctan(x+3)$$

5.6.1-4 d) Lösungsweg

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + C$$

$$x^3-1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

Ansatz: $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$ | Multiplikation mit dem Hauptnenner

$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$ | Ausmultiplizieren und sortieren

$0x^2 + 1x^1 + 0x^0 = (A+B)x^2 + (A-B+C)x^1 + (A-C)^0$ | Koeffizientenvergleich

$x^2: \quad 2 = A+B$

$x^1: \quad 1 = A-B+C$

$x^0: \quad 0 = A-C$

Lösung des Gleichungssystems: $A = \dfrac{1}{3}, \quad B = -\dfrac{1}{3}, \quad C = \dfrac{1}{3}$

Einsetzen:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + C$$

Lösungen

5.6.2-1

a) $\ln(2e^3 + 3) - \ln 5 = 2{,}156$

b) 0

c) 5,037 68 Lösungsweg

Kapitel 5	Abschnitt 5.6.2		Aufgaben ◄	

5.6.2-1 c) Lösungsweg

$$\int_2^3 \frac{6x^2-x+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+5\int\frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x+6\int\frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x\right]_2^3$$

$$=\left[-\ln|x|+\ln|x-1|-5\frac{1}{x-1}-3\frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3=\left[\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-5\frac{1}{x-1}-3\frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3=5{,}037\,68$$

Ansatz: $\dfrac{6x^2-x+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$ | Multiplikation mit dem Hauptnenner

$6x^2-x+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ | Einsetzen der Nullstellen und weiterer geeigneter Werte

$x=0:$	$1=-A$		$A=-1$
$x=1:$	$3=D$	$\Rightarrow$	$D=3$
$x=-1:$	$8=-8A-4B+2C-D$		$B=1$
$x=2:$	$23=A+2B+2C+2D$		$C=5$

Lösungen

5.6.3-1

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) ∞ (divergent)

d) 1 e) ∞ (divergent)

Kapitel 5	Abschnitt 5.6.5		Aufgaben ◄	

Lösungen

5.6.5-1 0,861 732 333 (Sehnen-Trapezregel) 0,867 113 700 (SIMPSON-Regel)
(auf 9 Nachkommastellen genau: 0,866 972 987 ...) Lösungsweg

5.6.5-2
a) 0,405 465 108
b) 0,405 580 806 (Sehnen-Trapezregel) 0,405 465 273 (SIMPSON-Regel) Lösungsweg

5.6.5-3
a) 1 600,790 705 384
b) 1 457,768 180 378
(auf 9 Nachkommastellen genau: 1 443,082 471 147 ...) Lösungsweg

5.6.5-4 1,262 733 418 (Sehnen-Trapezregel) 1,262 903 927 (SIMPSON-Regel)
(auf 9 Nachkommastellen genau: 1,262 904 528 ...) Lösungsweg

Bemerkung: Um die Genauigkeit der unterschiedlichen Lösungsverfahren vergleichen zu können, wurden die Lösungen hier ausnahmsweise mit 9 Nachkommastellen angegeben - das entspricht in der Regel der "Anzeigegenauigkeit" gängiger Taschenrechner.

5.6.5-1 Lösungsweg

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}, \qquad n=4, \qquad h=0{,}25$$

	$f(x_i)$		
x_i	1	4	2
0,00	1		
0,25		0,996 108 949	
0,50			0,941 176 470
0,75		0,759 643 916	
1,00	0,5		
	1,5	1,755 752 865	0,941 176 470

$$A_{\mathrm{Tr}} = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$I_{\mathrm{Tr}} = 0{,}25\left[\frac{1{,}5}{2} + 1{,}755\,752\,865 + 0{,}941\,176\,470\right] = 0{,}861\,732\,333$$

$$A_{\mathrm{Si}} = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+4\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2\cdot i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2\cdot i})\right]$$

$$I_{\mathrm{Si}} = \frac{0{,}25}{3}\left[1{,}5 + 4\cdot 1{,}755\,752\,865 + 2\cdot 0{,}941\,176\,470\right] = 0{,}867\,113\,700$$

$$I_{\mathrm{exakt}} = 0{,}866\,972\,987$$

5.6.5-2 Lösungsweg

a) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x} = \left[\ln|4+x|\right]_0^2 = \ln 6 - \ln 4 = 0{,}405\,465\,108$

b) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x}, \qquad n = 10, \qquad h = 0{,}2$

	$f(x_i)$		
x_i	1	4	2
0,0	0,25		
0,2		0,238 095 238	
0,4			0,227 272 727
0,6		0,217 391 304	
0,8			0,208 333 333
1,0		0,2	
1,2			0,192 307 692
1,4		0,185 185 185	
1,6			0,178 571 428
1,8		0,172 413 793	
2,0	0,166 666 667		
	0,416 666 667	1,013 085 520	0,806 485 180

$$A_{\mathrm{Tr}} = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$I_{\mathrm{Tr}} = 0{,}2 \cdot \left[\frac{0{,}416\,666\,667}{2} + 1{,}013\,085\,520 + 0{,}806\,485\,180\right] = 0{,}405\,580\,806$$

$$A_{\mathrm{Si}} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2\cdot i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2\cdot i})\right]$$

$$I_{\mathrm{Si}} = \frac{0{,}2}{3} \cdot \left[0{,}416\,666\,667 + 4 \cdot 1{,}013\,085\,520 + 2 \cdot 0{,}806\,485\,180\right] = 0{,}405\,465\,273$$

$$I_{\mathrm{exakt}} = 0{,}405\,465\,108$$

5.6.5-3 Lösungsweg

$$\int_1^3 e^{x^2}\,dx\,, \qquad n = 10\,, \qquad h = 0{,}2$$

	$f(x_i)$		
x_i	1	4	2
1,0	2,718 281 828		
1,2		4,220 695 817	
1,4			7,099 327 065
1,6		12,935 817 315	
1,8			25,533 721 747
2,0		54,598 150 033	
2,2			126,469 351 730
2,4		317,348 328 918	
2,6			862,642 195 789
2,8		2 540,204 833 827	
3,0	8 103,083 927 575		
	8 105,802 209 403	2 929,307 825 910	1 021,744 596 311

$$A_{\mathrm{Tr}} = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$I_{\mathrm{Tr}} = 0{,}2\cdot\left[\frac{8\,105{,}802\,209\,403}{2} + 2\,929{,}307\,825\,910 + 1\,021{,}744\,596\,311\right] = 1\,600{,}790\,705\,384$$

$$A_{\mathrm{Si}} = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+4\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2\cdot i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2\cdot i})\right]$$

$$I_{\mathrm{Si}} = \frac{0{,}2}{3}\cdot\left[8\,105{,}802\,209\,403 + 4\cdot 2\,929{,}307\,825\,910 + 2\cdot 1\,021{,}744\,596\,311\right] = 1\,457{,}768\,180\,378$$

$$I_{\mathrm{exakt}} = 1\,443{,}082\,471\,147$$

5.6.5-4 Lösungsweg

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad n=8\,,\qquad h=0{,}25$$

	$f(x_i)$		
x_i	1	4	2
2,00	0,585 786 437		
2,25		0,6	
2,50			0,612 574 113
2,75		0,623 821 488	
3,00			0,633 974 596
3,25		0,643 210 827	
3,50			0,651 668 522
3,75		0,659 457 573	
4,00	0,666 666 667		
	1,252 453 104	2,526 489 888	1,898 217 231

$$A_{\mathrm{Tr}} = h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$I_{\mathrm{Tr}} = 0{,}25\cdot\left[\frac{1{,}252\,453\,104}{2}+2{,}526\,489\,888+1{,}898\,217\,231\right]=1{,}262\,733\,418$$

$$A_{\mathrm{Si}} = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+4\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2\cdot i-1})+2\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2\cdot i})\right]$$

$$I_{\mathrm{Si}} = \frac{0{,}25}{3}\cdot\left[1{,}252\,453\,104+4\cdot 2{,}526\,489\,888+2\cdot 1{,}898\,217\,231\right]=1{,}262\,903\,927$$

$$I_{\mathrm{exakt}} = 1{,}262\,904\,528$$

Lösungen

5.7-1 a) $y = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ b) $y = C \cdot \mathrm{e}^{-\cos x}$ c) $y = C \cdot \sqrt{1+x^2}$

5.7-2 a) $y_s = \sqrt{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)^2 + 1 - \ln\left(1+\mathrm{e}\right)^2}$ Lösungsweg

b) $y_s = \ln\left|2 \cdot (1+x^2) - 1\right|$ Lösungsweg

5.7-3 a) $y_s = x \cdot \sin x + x \cdot \left(\frac{2}{\pi} - 1\right)$

b) $y_s = \sin x - \cos x$ Lösungsweg

c) $y_s = 4 \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 2$ Lösungsweg

d) $y_s = x + \frac{1}{x^2}$

e) $y_s = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{3x}$ Lösungsweg

5.7-4 $y_s = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x} - x - \frac{1}{2}$ Lösungsweg

5.7-2 a) Lösungsweg

$(1+e^x)\cdot y\cdot y' = e^x$ mit $y(1)=1$

Separable Differenzialgleichung

Lösungsverfahren: Trennen der Veränderlichen

$$\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+C$$

$$y^2 = \ln(1+e^x)^2 + 2C$$

$$y = \pm\sqrt{2C+\ln(1+e^x)^2} \qquad \text{allgemeine Lösung}$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(1)=1$:

$$1 = +\sqrt{2C+\ln(1+e^1)^2}$$

$$1 = 2C+\ln(1+e)^2$$

$$C = 0{,}5-\ln(1+e) = -0{,}813$$

$$y = \pm\sqrt{2C+\ln(1+e^x)^2}$$

$$y_s = +\sqrt{2(0,5-\ln(1+e))+\ln(1+e^x)^2}$$

$$y_s = \sqrt{1-\ln(1+e)^2+\ln(1+e^x)^2}$$

$$y_s = \sqrt{1+\ln\frac{(1+e^x)^2}{(1+e)^2}} = \sqrt{1+\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)^2} = \sqrt{1+2\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)} \qquad \text{spezielle Lösung}$$

5.7-2 b) Lösungsweg

$\mathrm{e}^y \cdot (1+x^2) \cdot y' - 2x \cdot (1+\mathrm{e}^y) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$

Separable Differenzialgleichung

Lösungsverfahren: Trennen der Veränderlichen

$\mathrm{e}^y \cdot (1+x^2)\mathrm{d}y = 2x \cdot (1+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y}\mathrm{d}y = \int \frac{2\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{d}x$$

$\ln(1+\mathrm{e}^y) = \ln(1+\mathrm{x}^2) + \ln C = \ln(C \cdot (1+x^2))$

$1+\mathrm{e}^y = C \cdot (1+x^2)$

$\mathrm{e}^y = C \cdot (1+x^2) - 1$

$y = \ln\left|C \cdot (1+x^2) - 1\right|$ allgemeine Lösung

Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(0) = 0$:

$0 = \ln|C-1|$

$1 = C - 1$

$C = 2$

$y_{\mathrm{s}} = \ln\left|2 \cdot (1+x^2) - 1\right|$ spezielle Lösung

5.7-3 b) Lösungsweg

$y' + (\tan x) \cdot y = \dfrac{1}{\cos x}$ mit $y(\pi) = 1$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

Lösungsverfahren: Variation der Konstanten

1. Lösen der zugehörigen homogenen Dgl. (Trennen der Veränderlichen):

$y' + (\tan x) \cdot y = 0$ $\quad\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(\tan x) \cdot y$

$\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \tan x \mathrm{d}x = -\int \dfrac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x$ (Lösung durch Substitution mit $z = \cos x$)

$\ln y = \ln \cos x + \ln C = \ln(C \cdot \cos x)$

$y_{\mathrm{h}} = C \cdot \cos x$ Lösung der homogenen Differenzialgleichung

2. Lösen der inhomogenen Dgl. (Variation der Konstanten):

Ansatz: $y = C(x) \cdot \cos x$,

$y' = C'(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot \sin x$

$C'(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}$

$C'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad\quad C'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$C(x) = \int \dfrac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x$ $\quad\quad y_{\mathrm{P}} = \tan x \cdot \cos x = \sin x$

spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = C \cdot \cos x + \sin x$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

3. Bestimmung von *C* (Berücksichtigung der Anfangsbedingung):

$y(\pi) = 1 = C \cdot (-1) + 0$, also $C = -1$

$y_{\mathrm{s}} = \sin x - \cos x$

5.7-3 c) Lösungsweg
$y' - x \cdot y = 2x \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$
Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung

Lösungsverfahren: Variation der Konstanten
1. Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. (Trennen der Veränderlichen):

$$y' - x \cdot y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \cdot y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + \ln C$$

$y_\mathrm{h} = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

2. Lösen der inhomogenen Differenzialgleichung (Variation der Konstanten):

Ansatz: $y = C(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$,

$$y' = C'(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$$

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot x - x \cdot C(x) \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = 2x$$

$$C'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C(x) = -2 \cdot \int (-x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$y_\mathrm{p} = -2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = -2$ spezielle Lösung der inhomogen Differentialgleichung

$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 2$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

3. Bestimmung von *C* (Berücksichtigung der Anfangsbedingung):
$y(0) = 2 = C \cdot 1 - 2$, also $C = 4$

$$y_\mathrm{s} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - 2$$

5.7-3 e) Lösungsweg

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{3x} \quad \text{mit} \quad y(0) = \frac{1}{5}$$

Differenzialgleichung 1. Ordnung

Lösungsverfahren: Variation der Konstanten
1. Lösung der zugehörigen homogenen Dgl (Trennen der Veränderlichen):

$$y' + 2 \cdot y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2 \cdot y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\int \mathrm{d}x$$

$$\ln y = -2x + \ln C$$

$y_\mathrm{h} = C \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

2. Variation der Konstanten
Ansatz: $y = C(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$

$$y' = C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (-2)$$

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (-2) + 2 \cdot C(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{3x}$$

$$C'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{3x} \qquad C'(x) = \mathrm{e}^{5x}$$

$$C(x) = \int \mathrm{e}^{5x} \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{5x}$$

$y_\mathrm{p} = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{5x} \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3x}$ spezielle Lösung der inhomogen Differentialgleichung

$y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p} = C \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3x}$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

3. Bestimmung von *C* (Berücksichtigung der Anfangsbedingung):

$$y(0) = \frac{1}{5} = C \cdot 1 + \frac{1}{5}\,, \quad \text{also} \quad C = 0$$

$$y_\mathrm{s} = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}$$

5.7-4 Lösungsweg
Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösungsverfahren: Variation der Konstanten
1. Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung
Charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, Nullstellen: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$

$y_h = C_1 \, e^{-2x} + C_2 \, e^x$

2. Lösen der inhomogenen Differenzialgleichung
Ansatz: $y(x) = A + Bx$,
$y' = B$, $y'' = 0$
Einsetzen in die Ausgangsgleichung
$B - 2(A + Bx) = 2x$ liefert $A = -\frac{1}{2}$ und $B = -1$, damit lautet die spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y_p = -x - \frac{1}{2}$.

Allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y = y_h + y_p$

$y = C_1 \, e^{-2x} + C_2 \, e^x - x - \frac{1}{2}$

3. Berücksichtigung der Anfangsbedingung
$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $y'(0) = -2C_1 + C_2 - 1 = 0$ somit $C_1 = -\frac{1}{3}$ und $C_2 = \frac{1}{3}$

Die spezielle Lösung lautet $y_s = -\frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x - x - \frac{1}{2}$.

Funktionen mit mehreren Variablen: Partielle Ableitungen, Gradient, HESSE-Matrix

6.2-1 Aufgabe
Bilden Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung:
$y = f(\mathbf{x}) = x_1 \ln x_2 + x_1 x_2^2$

6.2-2 Aufgabe
Bilden Sie alle partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von der Funktion:
$y = f(\mathbf{x}) = x_1^2 \, \mathrm{e}^{x_2} + x_1 x_2$

6.2-3 Aufgabe
Bestimmen Sie die zur Funktion
$f(x, y) = y\,(x^2 + y + 6) + x\,(y^2 + 3)$
gehörenden partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.
Wie lauten Gradient und HESSE-Matrix?

6.2-4 Aufgabe
Gegeben ist die Funktion:
$z(u, v, w) = u + v + w + uv + vw + uw + uvw$
Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie den Gradienten und die HESSE-Matrix.

Funktionen mit mehreren Variablen: Vollständiges Differenzial, Fehlerrechnung, Elastizität

6.3-1 Aufgabe

Der Gewinn an einem Produkt hängt von 8 Einflussgrößen $x_1, ..., x_8$ ab und lässt sich idealisiert beschreiben durch die folgende Funktion:

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2 - x_3^2 + 4x_4 + x_5 + 0{,}2x_6^2 - 0{,}1x_7^3 - x_8^2$$

Für $\boldsymbol{x} = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10)$ könnte das Unternehmen jede der Einflussgrößen um 10 % erhöhen.

Welche Einflussgröße wird die größte Gewinnsteigerung verursachen, welche die größte Gewinnminderung?

6.3-2 Aufgabe

Der Gewinn eines Unternehmens hängt von 4 Einflussgrößen auf folgende Weise ab:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_1x_2^2 + x_3^2 + 3x_4$$

Vom Ausgangsniveau $\boldsymbol{x} = (5, 10, 10, 5)$ könnte das Unternehmen jede der Einflussgrößen um 10 % erhöhen.

a) Welche Einflussgröße wird die größte Gewinnsteigerung verursachen?

b) Um welchen Betrag wird sich der Gewinn näherungsweise erhöhen, wenn alle Einflussgrößen um 10 % erhöht werden?
Hinweis: Verwenden Sie das totale Differenzial!

c) Wie groß sind die partiellen relativen Elastizitäten am Ausgangsniveau?

6.3-3 Aufgabe

Die Arbeitsproduktivität ist in Abhängigkeit vom Produktionsvolumen Y und Arbeitsaufwand A in der Form

$$P(Y, A) = \frac{Y}{A}$$

darstellbar. Um 50 ME eines Gutes zu produzieren werden 10 Arbeitsstunden benötigt.

a) Wie ändert sich die Arbeitsproduktivität näherungsweise, wenn in 11 Arbeitsstunden 60 ME dieses Gutes produziert werden?
Hinweis: Verwenden Sie das totale Differenzial!

b) Bestimmen Sie die partiellen relativen Elastizitäten für $Y = 50$ und $A = 10$.

Funktionen mit mehreren Variablen: Extremwertbestimmung

6.4-1 Aufgabe
Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion:
$z(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 10y$

6.4-2 Aufgabe
Bestimmen und charakterisieren Sie den (die) Extremwerte der Funktion:
$f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 6y$

6.4-3 Aufgabe
Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion:
$u(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2$

6.4-4 Aufgabe
Bestimmen Sie alle relativen Extremwerte der Funktion:
$$Z(x, y) = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy$$

6.4-5 Aufgabe
Untersuchen Sie die Funktion auf lokale (relative) Extremwerte:
$P(x, y) = x^2 y + y^2 - 6y - x^2$

6.4-6 Aufgabe
Ein Betrieb produziert Güter G_1 und G_2 in den Mengen x_1 und x_2.
Die Gewinnfunktion habe die Form:
$G = G(x_1, x_2) = 100x_1 + 140x_2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$
Bestimmen Sie die Größen x_1 und x_2 für die der Gewinn ein Maximum annimmt.
Wie groß wird der maximale Gewinn?

Funktionen mit mehreren Variablen: Methode der kleinsten Quadrate

6.6-1 Aufgabe
Gegeben ist die folgende Messreihe:

i	1	2	3	4	5
x_i	– 3	– 1	0	2	4
y_i	2,5	2,0	1,5	1,0	0,8

Bestimmen Sie dafür mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine lineare Funktion der Form $\tilde{y} = ax + b$.
Welcher Wert ist nach dieser Funktion für $x = 6$ zu erwarten?

6.6-2
In einem bestimmten Bereich hängt der Ernteertrag eines landwirtschaftlichen Gutes von der Menge eines eingesetzten Düngemittels je Hektar ab. Auf 6 Versuchsfeldern wird der Düngemitteleinsatz getestet. Dabei wurden die folgenden Erträge je Hektar erzielt:

Versuchsfeld	i	1	2	3	4	5	6
Düngemitteleinsatz in 100kg/ha	x_i	4	2	6	1	5	3
Ernteertrag in t/ha	y_i	25	15	25	10	30	26

a) Skizzieren Sie die Werte in einem (x, y) - Koordinatensystem!

Stellen Sie den Ernteertrag in Abhängigkeit von dem Düngemitteleinsatz mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Funktion

b) $\tilde{y} = ax + b$,

c) $\tilde{y} = ax^2 + bx + c$ dar.

6.6-3 Aufgabe
Für den Energieeinsatz in Abhängigkeit von der Außentemperatur liegt folgende Messreihe vor:

	i	1	2	3	4	5
Temperatur in °C	x_i	– 10	– 5	0	5	10
Energieeinsatz in kWh	y_i	7,1	4,3	2,7	1,7	1,1

a) Ermitteln Sie für die Messwerte eine Trendfunktion der Form $\tilde{y} = ae^{-0,1x} + b$.

b) Mit welchem Energieeinsatz ist dabei bei -15 °C zu rechnen?

Lösungen

6.2-1

$f_{x_1}(x_1,x_2) = \ln x_2 + x_2^2$

$f_{x_2}(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2} + 2x_1x_2$

$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 0$

$f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_2} + 2x_2$

$f_{x_2x_1}(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_2} + 2x_2$

$f_{x_2x_2}(x_1,x_2) = \dfrac{-x_1}{x_2^2} + 2x_1$

6.2-2

$f_{x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 \cdot e^{x_2} + x_2$

$f_{x_2}(x_1,x_2) = x_1^2 \cdot e^{x_2} + x_1$

$f_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 2 \cdot e^{x_2}$

$f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = 2x_1 \cdot e^{x_2} + 1$

$f_{x_2x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 \cdot e^{x_2} + 1$

$f_{x_2x_2}(x_1,x_2) = x_1^2 \cdot e^{x_2}$

6.2-3

$f_x = 2xy + y^2 + 3$

$f_y = x^2 + 2y + 6 + 2xy$

$f_{xx} = 2y$

$f_{xy} = 2x + 2y$

$f_{yx} = 2x + 2y$

$f_{yy} = 2 + 2x$

$$\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 + 3 \\ x^2 + 2y + 6 + 2xy \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2 + 2x \end{pmatrix}$$

6.2-4

$z_u = 1 + v + w + vw$ $z_v = 1 + u + w + uw$ $z_w = 1 + u + v + uv$

$z_{uu} = 0$ $z_{uv} = z_{vu} = 1 + w$ $z_{uw} = z_{wu} = 1 + v$ $z_{vv} = 0$ $z_{vw} = z_{wv} = 1 + u$ $z_{ww} = 0$

$$\operatorname{grad}(z) = \begin{pmatrix} 1 + v + w + vw \\ 1 + u + w + uw \\ 1 + u + v + uv \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + w & 1 + v \\ 1 + w & 0 & 1 + u \\ 1 + v & 1 + u & 0 \end{pmatrix}$$

Kapitel 6	Abschnitt 6.3		Aufgaben ◄	

Lösungen

6.3-1 x_1 bzw. x_7

6.3-2 a) x_1 b) 172,5 c) 0,816; 1,6; 0,32; 0,024

6.3-3 a) 0,5 b) 1; − 1

Lösungen

6.4-1 (2, – 5), $z_{\min} = -29$

6.4-2 (3, 0), $f_{\min} = -9$

6.4-3 (2, 2), $u_{\min} = -4$

6.4-4 (5, 2), $Z_{\min} = 30$

6.4-5 (0, 3), $P_{\min} = -9$

6.4-6 (30, 20), $\mathrm{G}_{\max} = 2\,900$

Lösungen

6.6-1 $\tilde{y} = -0{,}254x + 1{,}662$, $y(6) = 0{,}137$

6.6-2 b) $\tilde{y} = 3{,}40x + 9{,}93$ c) $\tilde{y} = -1{,}32x^2 + 12{,}65x - 2{,}4$

6.6-3 $\tilde{y} = 2{,}55\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 0{,}15$ $y(-15) = 11{,}57$ kWh

Numerische Verfahren: Fehleranalyse

7.3-1 Aufgabe
Berechnen Sie für die Intervallzahlen $a = [-2, 1]$ und $b = [-2, -1]$

a) $a - b$,
b) $a \cdot b$ und
c) $\dfrac{a}{b}$.

Numerische Verfahren: Grundbegriffe der Funktionalanalysis

7.4-1 Aufgabe
Bestimmen Sie Norm der beiden und den Abstand zwischen den beiden folgenden Vektoren nach drei Ihnen bekannten Norm- bzw. Abstandsdefinitionen:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.4-2 Aufgabe
Bestimmen Sie von der folgenden Marix $\boldsymbol{A}$
a) die Zeilensummennorm
b) die Spaltensummennorm

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Numerische Verfahren: Iterationsverfahren

7.5-1 Aufgabe
Lösen Sie iterativ das Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nach dem JACOBI-Verfahren.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie dazu die Konvergenzbedingung und führen Sie drei Iterationen aus.

7.5-2 Aufgabe
Lösen Sie das folgende nichtlineare Gleichungssystem mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens. Wählen Sie dabei $(x, y) = (1, 1)$ als Startwert und führen Sie drei Iterationen aus.

$$x^2 - x \cdot y + y^2 = 3$$
$$x \cdot y = \ln x$$

Numerische Verfahren: Pseudolösungen

7.8-1 Aufgabe
Gegeben ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Untersuchen sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Im Falle der Unlösbarkeit bestimmen Sie eine Lösung, die die gegebenen Gleichungen möglichst wenig verletzen.

7.8-2 Aufgabe
Einem Unternehmen stehen zur Produktion von zwei Erzeugnissen, die auf drei Maschinen produziert werden müssen, jeweils 400 h je Maschine zur Verfügung. Dabei soll jede Maschine voll ausgelastet werden. Die folgende Matrix gibt die Bearbeitungszeiten der einzelnen Erzeugnisse auf den drei Maschinen an:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

In welcher Menge sind die einzelnen Produkte zu produzieren?
a) Bestimmen Sie zu diesem Problem die Pseudolösung und geben Sie den Defekt an.
b) Wie kann dieser wirtschaftlich gedeutet werden?

Numerische Verfahren: Interpolation

7.9-1 Aufgabe
Bestimmen Sie zu den folgenden Wertepaaren die BÉZIER-Kurve, und zeichnen Sie den Kurvenverlauf. (5 Unterteilungen)

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	3	2	5	1

Lösungen

7.3-1 a) $[-1, 3]$ b) $[-2, 4]$ c) $[-1, 2]$

Lösungsweg

7.3-1 Lösungsweg

$a = [-2, 1]\;\; b = [-2, -1]$

a) $a - b = [-2 - (-1); 1 - (-2)] = [-1, 3]$

b) $a \cdot b = [\min(4, 2, -2, -1),\ \max(4, 2, -2, -1)] = [-2, 4]$

c) $\frac{1}{b} = \left[\frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}\right] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$

$\frac{a}{b} = \left[\min\left(2, 1, -1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(2, 1, -1, -\frac{1}{2}\right)\right] = [-1, 2]$

Lösungen

7.4-1 EUKLIDische Norm: $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 7{,}68$ $\|\boldsymbol{y}\|_2 = 5{,}92$

Summennorm: $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 15$ $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 11$

Maximumnorm: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 5$ $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 5$

EUKLIDischer Abstand: $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 13{,}42$
Maximumabstand: $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 10$
Manhattanabstand: $d_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 26$

7.4-2

a) $\|\boldsymbol{A}\|_Z = 9$ b) $\|\boldsymbol{A}\|_S = 8$

Lösungen

7.5-1 $\boldsymbol{x} = (4;\ 4{,}0625;\ 4{,}0625;\ 4)$ Lösungsweg

7.5-2 $x = 1{,}875;\ \ y = 0{,}335$ Lösungsweg

7.5-1 Lösungsweg
Matrizenschreibweise: Berechnung der Matrizen

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Iteration: $k = 1, 2, 3$ $\quad \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{b})$ mit dem Startvektor $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liefert:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3,75 \\ 3,75 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}0625 \\ 4{,}0625 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.5-2 Lösungsweg
Umformen auf

$f_1(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \qquad f_2(x, y) = xy - \ln x = 0$

JACOBI-Matrix

$$\boldsymbol{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x + 2y \\ y - \frac{1}{x} & x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Startwert } \boldsymbol{v}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Iteration: $k = 1, 2, 3$

$$\boldsymbol{v}^{(k)} = \boldsymbol{v}^{(k-1)} - \left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}^{(k-1)}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}^{(k-1)}) \qquad \left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}^{(0)})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}^{(1)})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,129 & 0,129 \\ 0,008 & 0,258 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2,50 \\ 0,25 \end{pmatrix}$ und $\left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}^{(2)})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,216 & 0,172 \\ 0,013 & 0,410 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,97 \\ 0,33 \end{pmatrix}$ (genaue Werte $x = 1{,}875$ und $y = 0{,}335$)

Lösungen

7.8-1 $x_1 = 2,\; x_2 = -0{,}667$ Lösungsweg

7.8-2 a) 45,7 ME vom ersten und 80 ME vom zweiten Erzeugnis.
b) Der Defekt gibt die Über- bzw. Unterschreitung der Maschinenkapazität an.
Lösungsweg

7.8-1 Lösungsweg

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,222 & -0,111 \\ -0,111 & 0,222 \end{pmatrix}$ liefert $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2,000 \\ -0,667 \end{pmatrix}$

7.8-2 Lösungsweg

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 56 & 28 \\ 28 & 24 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4\,800 \\ 3\,200 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,043 & -0,050 \\ -0,050 & 0,100 \end{pmatrix}$ liefert $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 45,714 \\ 80,000 \end{pmatrix}$

Defekt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -57,143 \\ 11,429 \\ 34,286 \end{pmatrix}$

b)
Die erste Maschine würde nicht ausgelastet werden (freie Kapazität von etwa 57 h), bei der zweiten und dritten Maschine wäre die Produktionszeit um etwa 11 h bzw. 34 h höher als die vorhandene Kapazität.

Lösung

7.9-1 Folgende Punkte bestimmen den Kurvenverlauf:

$$\boldsymbol{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}(0,2)=\begin{pmatrix}1,60\\2,79\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}(0,4)=\begin{pmatrix}2,20\\3,02\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}(0,6)=\begin{pmatrix}2,80\\3,14\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}(0,8)=\begin{pmatrix}3,40\\2,65\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{P}(1)=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

Lösungsweg

7.9-1 Lösungsweg

Die Berechnung der BERNSTEIN-Polynome für n = 3 liefert bei 5 Unterteilungen:

t	$J_{3,0}(t)$	$J_{3,1}(t)$	$J_{3,2}(t)$	$J_{3,3}(t)$
0	1,000	0	0	0
0,2	0,512	0,384	0,096	0,008
0,4	0,216	0,432	0,288	0,064
0,6	0,064	0,288	0,432	0,216
0,8	0,008	0,096	0,384	0,512
1,0	0	0	0	1,000

Damit können für die einzelnen t-Werte die folgenden Kurvenpunkte bestimmt werden:

$$\boldsymbol{P}(0)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}(0,2)=\begin{pmatrix}1,60\\2,79\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}(0,4)=\begin{pmatrix}2,20\\3,02\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}(0,6)=\begin{pmatrix}2,80\\3,14\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}(0,8)=\begin{pmatrix}3,40\\2,65\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}(1)=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Ereignisse)

8.1.1-1 Aufgabe
Eine 10-Centmünze wird dreimal geworfen. Beim i-ten Wurf können die Ereignisse Zahl (Z_i) oder Bild (B_i) auftreten.
a) Wie hängen Z_i und B_i zusammen?
b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse E_i durch die atomaren Ereignisse Z_i dar.
Bei den drei Würfen erscheint
E_1: niemals die Zahl
E_2: genau einmal die Zahl
E_3: genau zweimal die Zahl
E_4: stets die Zahl
E_5: mindestens einmal Zahl
E_6: mindestens zweimal Zahl
E_7: höchstens einmal Zahl
E_8: höchstens zweimal Zahl

8.1.1-2 Aufgabe
Von 6 potenziellen Autokäufern sei bekannt, dass vier das Modell VA Boxer favorisieren. Drei der 6 potenziellen Käufer werden zufällig ausgewählt. Stellen Sie die folgenden Ereignisse E_i durch die Ereignisse A_i (i-ter potentieller Käufer bevorzugt das Modell VA Boxer) dar.
Unter den drei zufällig ausgewählten potenziellen Käufern favorisiert
E_1: genau einer,
E_2: mindestens einer,
E_3: höchsten einer,
E_4: jeder das Modell VA Boxer.

8.1.1-3 Aufgabe
Bei einem idealen Würfel können bei jedem Wurf die natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6 erscheinen. Diese Ereignisse werden beim 1. Wurf durch A_i und beim zweiten Wurf durch B_i jeweils für das Werfen der Zahl i bezeichnet. Stellen Sie die folgende Ereignisse E_i durch die atomaren Ereignisse A_i und B_i dar:
Bei zwei Würfen beträgt die Summe der Augenzahlen
E_1: genau zwei
E_2: genau drei
E_3: höchsten drei
E_4: mindestens 11.

8.1.1-4 Aufgabe
Eine Gruppe von 5 Personen soll mit einem Test auf ihr Kaufverhalten untersucht werden. Dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet: Die i-te Person reagiert positiv und kauft das angepriesene Produkt (K_i). Stellen Sie die folgenden Ereignisse E_i durch die Ereignisse K_i dar.
Von den betrachteten Personen kaufen
E_1: keine
E_2: mindestens eine
E_3: höchsten eine
E_4: alle das angepriesene Produkt.

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Ereignisse)

8.1.1-5 Aufgabe

Überprüfen Sie, ob die folgenden Ereignisse einander ausschließen oder nicht:

a) Wurf mit zwei Würfeln:
Ereignis A: erster Wurf eine 6
Ereignis B: zweiter Wurf eine 1

b) Qualitätsuntersuchung von zwei Erzeugnissen
Ereignis A: beide Erzeugnisse sind normgerecht
Ereignis B: genau ein Erzeugnis ist normgerecht
Ereignis C: mindestens ein Erzeugnis ist Ausschuss

8.1.1-6 Aufgabe

Eine Postsendung enthält 100 Leuchtdioden. Betrachtet wird das folgende Ereignis:
A = {alle Leuchtdioden sind funktionsfähig}
Wie lautet das komplementäre Ereignis $\overline{A}$?

8.1.1-7 Aufgabe

Es wird mit zwei Würfeln geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen höchstens 6 (≤ 6) beträgt?

8.1.1-8 Aufgabe

Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine ungerade Augenzahl oder eine Zahl mindestens 5 (≥ 5) zu werfen.

8.1.1-9 Aufgabe

Bei Lebensmittelkontrollen wurden jeweils zwei Proben entnommen und getestet. Das Produkt erhält das Gütesiegel nicht, wenn mindestens ein Test nicht bestanden wurde. Kontrolliert wurden 20 Produkte. Die Testergebnisse sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

1. Test	davon 2. Test
12 bestanden	4 bestanden und 8 nicht bestanden
8 nicht bestanden	2 bestanden und 6 nicht bestanden

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt das Gütesiegel nicht erhält?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt, das den ersten Test besteht, auch den zweiten besteht?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Wahrscheinlichkeit)

8.1.1-10 Aufgabe
In einer Urne befinden sich 6 weiße und 14 schwarze Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
a) eine weiße Kugel
b) eine nichtweiße Kugel zu ziehen?

8.1.1-11 Aufgabe
In einer Urne befinden sich 6 weiße und 14 schwarze Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, gleichzeitig
a) zwei weiße Kugel
b) zwei nichtweiße Kugeln zu ziehen?

8.1.1-12 Aufgabe
In einer Urne befinden sich 6 weiße und 14 schwarze Kugeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nacheinander, wenn die erste Kugel sofort wieder zurückgelegt wird,
a) zwei weiße Kugeln
b) zwei nichtweiße Kugeln zu ziehen?

8.1.1-13 Aufgabe
In einem Behälter befinden sich 20 elektronische Bauelemente, darunter 4 defekte. Es werden gleichzeitig zwei Bauelemente entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) beide Teile brauchbar sind
b) beide Teile unbrauchbar sind
c) wenigstens ein Teil brauchbar ist?

8.1.1-14 Aufgabe
Für ein Scrabble-Spiel werden 102 mit Buchstaben bezeichnete Steine benötigt. Genau 15 Steine tragen den Buchstaben E. Jeder Mitspieler erhält 7 Steine.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen 7 Steinen genau
a) kein E
b) einmal E
c) viermal E
d) siebenmal E befinden?

8.1.1-15 Aufgabe
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lottospiel "6 aus 49" genau
a) 6 Richtige
b) 5 Richtige
c) 4 Richtige
d) 3 Richtige
zu tippen?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Wahrscheinlichkeit)

8.1.1-16 Aufgabe
Von 6 potenziellen Autokäufern sei bekannt, dass vier das Modell VA Boxer favorisieren.
Drei der 6 potenziellen Käufer werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Aufgabe 8.1.1-2 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
E_1: genau einer
E_2: mindestens einer
E_3: höchsten einer
E_4: jeder das Modell VA Boxer favorisiert.

8.1.1-17 Aufgabe
Eine 10-Centmünze wird dreimal geworfen. Bei jedem Wurf können die Ereignisse Zahl und Bild auftreten.
Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Aufgabe 8.1.1-1 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
E_1: niemals die Zahl
E_2: genau einmal die Zahl
E_3: genau zweimal die Zahl
E_4: stets die Zahl
E_5: mindestens einmal Zahl
E_6: mindestens zweimal Zahl
E_7: höchstens einmal Zahl
E_8: höchstens zweimal Zahl erscheint.

8.1.1-18 Aufgabe
Bei einem idealen Würfel können bei jedem Wurf die natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6 erscheinen.
Diese Ereignisse werden durch A_i für das Werfen der Zahl i bezeichnet.
Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Aufgabe 8.1.1-3 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zwei Würfen die Summe der Augenzahlen
E_1: genau zwei
E_2: genau drei
E_3: höchsten drei
E_4: mindestens 11 beträgt.

8.1.1-19 Aufgabe
Eine Gruppe von 5 Personen soll mit einem Test auf ihr Kaufverhalten untersucht werden. Aus vorhergehenden Untersuchungen ist bekannt, dass etwa 30 % aller Kunden der Verführung zum Kauf unterliegen.
Bestimmen Sie unter Ausnutzung der Aufgabe 8.1.1-4 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den betrachteten Personen
E_1: keine
E_2: mindestens eine
E_3: höchsten eine
E_4: alle das angepriesene Produkt kaufen.

Hinweis: Es kann Unabhängigkeit vorausgesetzt werden.

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Wahrscheinlichkeit)

8.1.1-20 Aufgabe
Ein idealer Würfel wird zweimal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten oder im zweiten Wurf eine 6 erscheint?

8.1.1-21 Aufgabe
Ein idealer Würfel wird 9 Mal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal die 6 erscheint?

8.1.1-22 Aufgabe
Untersuchungen in einem Großunternehmen haben ergeben, dass ein positives Betriebsklima bei ca. 7 von 10 Mitarbeitern überflüssige Krankschreibungen verhindert. In einer Abteilung arbeiten 6 Personen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Abteilung bei mindestens einer Person bei positivem Betriebsklima überflüssige Krankschreibungen nicht reduzieren?

Hinweis: Es kann Unabhängigkeit vorausgesetzt werden.

8.1.1-23 Aufgabe
Zu einem Skatspiel gehören 32 Karten (jeweils vier Asse, Könige, Damen, Buben, "10", "9", "8", "7").
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Karten alle vier Asse, alle vier Buben und zweimal die "10" befinden?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe (Wahrscheinlichkeit)

8.1.1-24 Aufgabe
Drei automatische Anlagen produzieren elektronische Bauelemente. Dabei wurden folgende Daten ermittelt:

Anlage	produzierte Menge in Stück	davon Ausschuss in %
1	20 000	1,4
2	30 000	2,3
3	50 000	4,0

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) ein aus der Gesamtmenge stammendes Bauelement Ausschuss ist
b) ein defektes Bauelement von der Anlage 3 stammt?

8.1.1-25 Aufgabe
In drei Abteilungen eines Großunternehmens werden gleiche elektronische Bauelemente gefertigt. Dabei liefern die einzelnen Abteilungen 20 %, 30 % und 50 % des gesamten Bedarfes mit einer Ausschussquote von 1 %, 2 % und 4 %. Die Bauelemente werden in einem Lager gesammelt.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus dem Lager entnommenes Bauelement nicht verwendungsfähig ist?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein nicht verwendungsfähiges Bauelement aus der 1. Abteilung?

8.1.1-26 Aufgabe
In einem Unternehmen sind 96 % aller Erzeugnisse eines Typs normgerecht. Bei einer Qualitätskontrolle wird ein Kontrollsystem angewandt, das 98 % der normgerechten Erzeugnisse als normgerecht und 95 % der nicht normgerechten Erzeugnisse als nichtnormgerecht erkennt (ausweist).
a) Es wird nun ein Erzeugnis geprüft und als normgerecht ausgewiesen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Erzeugnis wirklich der Norm entspricht?
b) Es wird nun ein weiteres Erzeugnis geprüft und als **nicht** normgerecht ausgewiesen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Erzeugnis wirklich **nicht** der Norm entspricht?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Diskrete Verteilungen

8.1.2-1 Aufgabe
Aus einem Warenposten werden drei Produkte zufällig herausgegriffen und kontrolliert.
Im Durchschnitt bestehen 30 % der Waren die Kontrolle nicht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass 0, 1, 2 oder 3 Produkte die Prüfung nicht bestehen.

8.1.2-2 Aufgabe
Die Wahrscheinlichkeit, auf dem Brocken (Höchster Berg in Norddeutschland, Höhe 1142m) eine gute Sicht zu haben, beträgt etwa 0,16. Eine Familie möchte 7 Tage auf dem Brocken Urlaub machen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an mindestens einem Tag eine gute Sicht zu haben?
b) Wie lange müsste ein Urlaub geplant werden, damit mit einer Sicherheit von mindestens 90 % an mindestens einem Tag eine gute Sicht herrscht?

8.1.2-3 Aufgabe
In einem Restaurant befinden sich 30 Gäste, 10 männliche und 20 weibliche. 6 Gäste werden zufällig ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen höchstens zwei männliche befinden?

8.1.2-4 Aufgabe
Bei einer automatischen Produktion von Erzeugnissen entsprechen 97,5 % aller Teile der Norm.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, unter 100 Teilen höchstens eines zu haben, das der Norm nicht entspricht?

8.1.2-5 Aufgabe
Ein Dienstleistungsunternehmen registriert durchschnittlich 90 Kundenanforderungen je Stunde.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Minute mehr als drei Kunden bedient werden müssen?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Diskrete Verteilungen

8.1.2-6 Aufgabe
Bei einem Qualitätstest werden unter gleichen Bedingungen unabhängig voneinander zufällige Stichproben durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe ein normgerechtes Produkt liefert, sei 0,95.
Wie viele Stichproben müssen durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens ein nichtnormgerechtes Produkt gefunden wird?

8.1.2-7 Aufgabe
An den Kassen eines Supermarktes treffen in der Minute im Durchschnitt 4 Kunden ein. Die Anzahl der pro Minute eintreffenden Kunden sei POISSONverteilt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute
a) kein Kunde
b) mindestens 3 Kunden eintreffen?

8.1.2-8 Aufgabe
In einem Karton befinden sich 36 LED-Lampen, darunter 6 defekte.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 3 zufällig entnommenen Lampen keine defekten vorhanden sind, wenn jede Lampe
a) nicht zurückgelegt wird
b) jeweils wieder sofort zurückgelegt wird?

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Stetige Verteilungen

8.1.3-1 Aufgabe
Gegeben ist die folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}5x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die dazugehörige Verteilungsfunktion.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert.

8.1.3-2 Aufgabe
Gegeben ist die folgende Funktion f:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x \le 0 \\ 4x & , \quad 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 4(1-x) & , \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

a) Stellt f eine Dichtefunktion dar?
b) Skizzieren Sie f.
c) Berechnen Sie die zur Dichtefunktion f gehörende Verteilungsfunktion F und skizzieren Sie F.
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\,(0{,}25 \le X \le 0{,}75)$ und markieren Sie diese in beiden Skizzen.
e) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung σ.

8.1.3-3 Aufgabe
Gegeben ist die folgende Funktion f:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < 1 \\ c(x-3)^2 & , \quad 1 \le x \le 3 \\ 0 & , \quad 3 < x < \infty \end{cases}$$

a) Für welchen Wert c ist die Funktion f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen?
b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F.
c) Skizzieren Sie die Dichte- und die Verteilungsfunktion.
d) Berechnen Sie $E(X)$ und die Standardabweichung σ.

8.1.3-4 Aufgabe
Ermitteln Sie für eine Gleichverteilung mit $a = 6$ und $b = 10$
a) die Verteilungsfunktion F
b) die Wahrscheinlichkeit $P(7{,}5 \le X \le 8)$
c) den Erwartungswert E und
d) die Standartabweichung σ.
e) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeit $P(7{,}5 \le X \le 8)$ in Dichte- und Verteilungsfunktion.

Statistik: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Stetige Verteilungen

8.1.3-5 Aufgabe
Die Zeit X, die zur Wartung einer Heizungsanlage nötig ist, genüge einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0{,}4\ \mathrm{h}^{-1}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartung der Anlage höchstens 5 h in Anspruch nimmt?
b) Welche Zeit wird durchschnittlich zur Wartung einer solchen Anlage benötigt?

8.1.3-6 Aufgabe
Die Verweildauer eines Kunden an der Kasse eines Supermarktes sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Die mittlere Verweildauer betrage 3 Minuten.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kunde

a) höchstens eine Minute
b) mindestens 4 Minuten an der Kasse aufhalten muss?

8.1.3-7 Aufgabe
Die Reparaturdauer einer Maschine sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit dem Parameter $\lambda = 0{,}3\ \mathrm{h}^{-1}$.

a) Wie hoch ist die mittlere Reparaturdauer?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturdauer weniger als 2 h beträgt?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturdauer mindestens 2 h beträgt?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reparaturdauer genau 2 h beträgt?
e) In welcher Zeit ist eine Reparatur mit einer Sicherheit von 90 % beendet?

8.1.3-8 Aufgabe
Die Anzahl der Kfz, die stündlich zur Hauptverkehrszeit eine Straße befahren, sei eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu = 1\,020$ und $\sigma^2 = 121$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) stündlich weniger als 1 000 Kfz die Straße nutzen
b) die Anzahl dieser Fahrzeuge im Bereich $1\,000 \le X \le 1\,040$ liegt
c) stündlich mehr als 1 040 Kfz die Straße nutzen?

8.1.3-9 Aufgabe
Die Menge, die durch eine automatische Abfüllanlage in Flaschen gefüllt wird, sei eine normalverteilte Zufallsgröße. Es ist bekannt, dass 94 % der Realisierungen dieser Zufallsgröße in einem zum Erwartungswert μ symmetrischen Intervall [96, 104] liegen.

a) Wie groß ist die Standardabweichung σ?
b) Mit welcher Standardabweichung muss die Anlage höchstens arbeiten, damit 99 % der Realisierungen in diesem Intervall liegen?

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Univariate Datenanalyse

8.2.1-1 Aufgabe
Charakterisieren Sie die nachfolgenden Merkmale, ob sie
- quantitativer oder qualitativer Art,
- wenn quantitativ: diskreter, stetiger oder quasi-stetiger Art sind und
- welches Skalenniveau sie aufweisen:

a) Lebensalter
b) Temperatur in °C
c) Arbeitslosenzahl
d) Lagerbestand
e) Staatsangehörigkeit
f) Preis
g) Güteklassen bei Obst
h) Klausurnoten
i) Lebensdauer einer Maschine
j) Matrikelnummer

8.2.1-2 Aufgabe
Gegeben ist die folgende Messreihe: 36, 42, 40, 38, 39, 43, 37, 40, 41, 39.
Bestimmen Sie:
a) die Variationsreihe
b) den arithmetischen Mittelwert
c) den Modalwert, den Median (Zentralwert) und die Spannweite
d) die Varianz und die Standardabweichung
e) den Variationskoeffizienten
f) das Bild vom Stabdiagramm für die absolute Häufigkeit der Messwerte
g) das Bild der zugehörigen Verteilungsfunktion als Treppenfunktion

8.2.1-3 Aufgabe
Gegeben sind die beiden folgenden Altersverteilungen bei Geflügel:

Alter in Jahren	1	2	3	4	5	6
V_1	1	4	5	5	4	1
V_2	2	5	7	3	2	1

Ermitteln Sie für die beiden Verteilungen:
a) die arithmetischen Mittelwerte
b) die Varianzen und die Standardabweichungen
c) die Variationskoeffizienten
d) die Schiefen

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Univariate Datenanalyse

8.2.1-4 Aufgabe
Eine Befragung von 10 Wismarer Studenten nach ihrem Monatseinkommen brachte folgendes Ergebnis:
Einkommen in €: 500, 400, 400, 450, 500, 200, 350, 450, 500, 650

a) Berechnen Sie Median und arithmetischen Mittelwert des Einkommens und interpretieren Sie beide Werte.
b) Berechnen Sie Quartilsabstand und Standardabweichung des Merkmals Einkommen und interpretieren Sie auch diese Ergebnisse.
c) Berechnen Sie die Werte der LORENZkurve und stellen Sie diese grafisch dar.
   Berechnen Sie zudem den Wert des GINI-Koeffizienten und interpretieren Sie ihn.
d) Angenommen, jeder der 10 Studenten erzielt monatlich ein um 100 € höheres Einkommen.
   Wie würden sich der Quartilsabstand, die Standardabweichung und der GINI-Koeffizient verändern? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne Berechnung.

8.2.1-5 Aufgabe
Eine Untersuchung von 40 000 Betrieben der Landwirtschaft zur Größe der landwirtschaftlich genutzten Fläche ergab zu einem Stichtag folgende Häufigkeitstabelle (Variable X: landwirtschaftlich genutzte Fläche):

Klasse	landwirtschaftlich genutzte Fläche in ha	Anzahl der Betriebe in 1 000
1	[0 - 20)	5
2	[20 - 35)	6
3	[35 - 50)	12
4	[50 - 100)	11
5	[100 - 300)	6

a) Beschreiben Sie das untersuchte statistische Material.
b) Berechnen Sie die relative Häufigkeitsverteilung sowie die absoluten und die relativen Summenhäufigkeiten.
c) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten in einem Histogramm und die relativen Summenhäufigkeiten grafisch dar.
d) Berechnen Sie den Wert der empirischen Verteilungsfunktion an der Stelle $x = 200$, überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch die grafische Bestimmung des Funktionswertes und interpretieren Sie dieses.
e) Bestimmen Sie das untere und das obere Quartil.

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Univariate Datenanalyse

8.2.1-6 Aufgabe
Eine Baugesellschaft erstellte 1 250 Mietwohnungen, deren Mieten sich wie folgt verteilen:

Miete in €	Anzahl der Wohnungen
[300 - 450)	150
[450 - 550)	275
[550 - 750)	525
[750 - 1 000)	175
[1 000 - 1 300)	125

a) Beschreiben Sie das untersuchte statistische Material.
b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, die Quartile, den Modalwert, die Varianz, die Standardabweichung und den Variationskoeffizienten.
c) Stellen Sie die statistischen Maßzahlen in einem Boxplot dar.
d) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und stellen Sie sie in einem Histogramm dar.
e) Berechnen Sie die relativen Summenhäufigkeiten und stellen Sie die empirische Verteilungsfunktion als Summenhäufigkeitsfunktion grafisch dar.
f) Bestimmen Sie die gesamten jährlichen Mieteinnahmen der Baugesellschaft.
Welche Annahmen treffen Sie dabei?
g) Ermitteln Sie den Anteil der Wohnungen, deren Mieteinnahmen zwischen 500 und 700 € liegen.

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Bi- und multivariate Datenanalyse

8.2.2-1 Aufgabe

Für neun Unternehmen eines Wirtschaftszweiges soll untersucht werden, welcher Zusammenhang zwischen Umsatz und Beschäftigten besteht. Im Untersuchungsjahr wurden folgende Umsätze und Beschäftigte festgestellt:

Umsatz in Mill. €	2	5	13	17	21	22	38	40	42
Beschäftigte	10	21	39	45	54	66	87	99	109

a) Welches ist in diesem Fall das abhängige und welches das unabhängige Merkmal?
b) Bestimmen Sie die Regressionsgerade und interpretieren Sie a_1.
c) Skizzieren Sie das Streuungsdiagramm und die Regressionsgerade.
d) Mit welchem Umsatz könnte ein Unternehmen rechnen, wenn es 120 Beschäftigte hätte? Welche Annahme machen Sie dabei?
e) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten und interpretieren Sie das Ergebnis.

8.2.2-2 Aufgabe

Ein Produkt wird getestet. Folgende Angaben liegen – getrennt nach Geschlechtern – über das Interesse an diesem Produkt vor:

Geschlecht	Interesse	kein Interesse
männlich	5	15
weiblich	65	15

a) Überprüfen Sie (keine Berechnung), ob die beiden Merkmale „Geschlecht“ und „Interesse“ statistisch unabhängig sind.
b) Berechnen Sie das Maß von CRAMÉR für den Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen. Welche Aussage können Sie hieraus ableiten?
c) Wie müsste die zweidimensionale Häufigkeitstabelle aussehen, wenn zwischen den beiden Merkmalen eine vollständige statistische Abhängigkeit bestehen würde?

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Maß- und Indexzahlen

8.2.3-1 Aufgabe
Die Preise für die Produkte einer Konservenfabrik und ihre Umsätze unterlagen im Zeitablauf folgenden Schwankungen:

Konserven	Preise in €		Jahresumsatz in 1 000 Stück	
	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 1	Jahr 2
Gemüse	1,0	1,5	200	150
Obst	1,5	2,0	150	120
Fertiggerichte	6,0	3,0	180	156

Berechnen und interpretieren Sie die Preis- und Mengenindizes nach LASPEYRES und PAASCHE.

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Bestands- und Bewegungsmasse

8.2.4-1 Aufgabe
In einer Stadt soll eine Buslinie auf ihre Auslastung hin untersucht werden. Bei einer ersten Stichprobe wird für eine Fahrt jeweils die Anzahl der ein- und ausgestiegenen Personen erfasst (die Fahrzeit zwischen zwei Haltestellen beträgt einschließlich Ein- und Ausstieg jeweils 3 Minuten):

Haltestelle	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Einsteiger	5	3	4	3	1	3	2	1	-
Aussteiger	-	1	2	4	3	2	3	4	3

a) Stellen Sie die Bestandsfunktion grafisch dar.
b) Wie viele Fahrgäste befinden sich durchschnittlich im Bus?
c) Wie lange fährt ein Fahrgast durchschnittlich mit dem Bus?
d) Wie oft findet ein Wechsel der Fahrgäste statt?

Statistik: Beschreibende (deskriptive) Statistik – Zeitreihenanalyse

8.2.5-1 Aufgabe
Für einen internationalen Flughafen liegen für vier Jahre folgende Passagierzahlen vor:

Jahr	Fluggäste in 1 000			
	1. Quartal	2. Quartal	3. Quartal	4. Quartal
1	3 581	3 630	3 877	4 069
2	3 982	4 061	4 360	4 485
3	4 389	4 554	4 831	4 908
4	4 795	4 848	5 224	5 332

a) Beschreiben Sie allgemein die Komponenten einer Zeitreihe.
b) Stellen Sie die Zeitreihe grafisch dar. Welches Zeitreihenmodell erachten Sie für diese Reihe als geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Berechnen Sie mit Hilfe des Phasendurchschnittsverfahrens unter Verwendung geeigneter gleitender Durchschnitte die Saisonindizes und interpretieren Sie diese.
d) Verwenden Sie die jährlichen Passagierzahlen als Grundlage für die Berechnung einer linearen Trendfunktion. Interpretieren Sie die Koeffizienten der Trendfunktion.
e) Welche Anzahl war auf Basis der Trendfunktion für das fünfte Jahr zu erwarten?
Gliedern Sie diese Anzahl auf die Quartale auf.
f) Welche sachlichen Unterschiede bestehen zwischen Regressions- und Trendrechnung?

Statistik: Schließende (induktive) Statistik – Statistische Schätzverfahren

8.3.2-1 Aufgabe
Gegeben sei eine normalverteilte Grundgesamtheit mit $\sigma = 0{,}6$. Eine Stichprobe mit $n = 30$ liefert $\bar{x} = 15$.

a) Für μ ist eine konkrete Konfidenzschätzung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % bzw. 1 % zu ermitteln.

b) Wie groß ist der Stichprobenumfang n zu wählen, damit bei $\alpha = 0{,}01$ das Konfidenzintervall δ die Länge 0,2 hat?

8.3.2-2 Aufgabe
Gegeben sei eine normalverteilte Grundgesamtheit. Eine Stichprobe mit dem Umfang $n = 30$ liefert $\bar{x} = 15$ und $s = 0{,}6$.

Für μ ist ein Konfidenzintervall mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % bzw. 1 % zu ermitteln.

Statistik: Schließende (induktive) Statistik – Statistische Tests

8.3.3-1 Aufgabe
Die Anzahl von Jungweißstörchen pro Brut wird mit einem Durchschnittswert von 2,21 angegeben. Die Standardabweichung beträgt 0,61. Eine Stichprobe bei 7 Storchpaaren lieferte den Wert $\bar{x} = 2{,}14$ und $s = 0{,}46$. Ist die Abweichung signifikant? (99 % Sicherheit)

8.3.3-2 Aufgabe
Der Hersteller eines Autos gibt den Kraftstoffverbrauch von 6,8 l/100km bei gemischter Fahrweise an. Eine Autozeitschrift möchte nun wissen, ob dieser Wert glaubwürdig ist. Dazu werden 25 Fahrzeuge unter gleichen Bedingungen getestet. Es wurde ein durchschnittlicher Verbrauch von 7,4 l/100km festgestellt. Die Standardabweichung betrug 0,5 l/100km.
Ist die Abweichung signifikant?

8.3.3-3 Aufgabe
Die Anzahl von Jungtieren pro Wurf bei Pumas wird mit einem Durchschnittswert von 2,19 angegeben. Eine Stichprobe bei 7 Würfen lieferte $\bar{x} = 2{,}24$ und $s = 0{,}2$.
Ist die Abweichung vom Erwartungswert signifikant?

8.3.3-4 Aufgabe
Es liegen zwei Beobachtungsreihen mit gleichen Varianzen beider Grundgesamtheiten vor:

B_1	2,68	2,69	2,67	2,69	2,70	2,68	
B_2	2,64	2,65	2,70	2,66	2,68	2,67	2,66

Prüfen Sie, ob die Abweichung der beiden Mittelwerte der Beobachtungsreihen mit einer Sicherheit von 95 % signifikant ist.

8.3.3-5 Aufgabe
Bei einer Statistikklausur konnten die folgenden Ergebnisse erzielt werden:

Note	1	2	3	4	5
männlich	5	20	35	25	7
weiblich	8	31	24	20	5

Überprüfen sie die Hypothese, dass die Merkmale Geschlecht und Bewertung (Note) stochastisch unabhängig sind, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05.

8.3.3-6 Aufgabe
Bei einer Klausur in Finanzwirtschaft wurden von den Teilnehmern die folgenden Bewertungen erreicht:

Note	1	2	3	4	5
männlich	6	20	29	27	10
weiblich	7	37	24	15	5

Überprüfen sie die Hypothese, dass die Merkmale Geschlecht und Bewertung (Note) stochastisch unabhängig sind, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,05.

Lösungen

8.1.1-1 a) $Z_i = \overline{B}_i$ bzw. $B_i = \overline{Z}_i$

b) $E_1 = \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_3$

$E_2 = \left(Z_1 \cap \overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap Z_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2 \cap Z_3\right)$

$E_3 = \left(Z_1 \cap Z_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(Z_1 \cap \overline{Z}_2 \cap Z_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap Z_2 \cap Z_3\right)$

$E_4 = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$

$E_5 = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 = \overline{\overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_3} = \overline{E}_1$

$E_6 = E_3 \cup E_4 = \left(Z_1 \cap Z_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(Z_1 \cap \overline{Z}_2 \cap Z_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap Z_2 \cap Z_3\right) \cup \left(Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3\right)$

$E_7 = E_1 \cup E_2 = \left(\overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(Z_1 \cap \overline{Z}_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap Z_2 \cap \overline{Z}_3\right) \cup \left(\overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2 \cap Z_3\right)$

$E_8 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \overline{E}_4 = \overline{Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2 \cup \overline{Z}_3$

8.1.1-2 $E_1 = \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right)$

$E_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \overline{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3}$

$E_3 = \left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup E_1$

Hinweis: Der Klammerausdruck liefert in diesem speziellen Fall das unmögliche Ereignis.

$E_4 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

8.1.1-3 $E_1 = A_1 \cap B_1$

$E_2 = \left(A_1 \cap B_2\right) \cup \left(A_2 \cap B_1\right)$

$E_3 = E_1 \cup E_2$

$E_4 = \left(A_6 \cap B_6\right) \cup \left(A_6 \cap B_5\right) \cup \left(A_5 \cap B_6\right)$

8.1.1-4 $E_1 = \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5$

$E_2 = \overline{\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5}$

$$\begin{aligned} E_3 = & \left(\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5\right) \cup \left(K_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5\right) \\ & \cup \left(\overline{K}_1 \cap K_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5\right) \cup \left(\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap K_3 \cap \overline{K}_4 \cap \overline{K}_5\right) \\ & \cup \left(\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap K_4 \cap \overline{K}_5\right) \cup \left(\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap \overline{K}_3 \cap \overline{K}_4 \cap K_5\right) \end{aligned}$$

$E_4 = K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_4 \cap K_5$

Lösungen

8.1.1-5 a) A und B schließen einander nicht aus.
b) einander ausschließend: A und B, A und C
nicht einander ausschließend: B und C

8.1.1-6 $\overline{A}$ = {mindestens eine Leuchtdiode ist defekt}

8.1.1-7 0,417

8.1.1-8 0,667

8.1.1-9 a) 0,8 b) 0,333 Lösungswege 8.1.1-7 bis 8.1.1-9

8.1.1-10 a) 0,3 b) 0,7

8.1.1-11 a) 0,079 b) 0,479

8.1.1-12 a) 0,090 b) 0,490 Lösungswege 8.1.1-10 bis 8.1.1-12

8.1.1-13 a) 0,632 b) 0,032 c) 0,968

8.1.1-14 a) 0,316 b) 0,410 c) 0,008
d) $3{,}48 \cdot 10^{-7}$

8.1.1-15 a) $7{,}15 \cdot 10^{-8}$ b) $1{,}84 \cdot 10^{-5}$ c) $9{,}69 \cdot 10^{-4}$
d) 0,018
Lösungswege 8.1.1-13 bis 8.1.1-15

Kapitel 8	Abschnitt 8.1.1		Aufgaben ◄	

Lösungen

8.1.1-16 0,2; 1; 0,2; 0,2

8.1.1-17 0,125; 0,375; 0,375; 0,125; 0,875; 0,500; 0,500; 0,875

8.1.1-18 0,028; 0,056; 0,083; 0,083

8.1.1-19 0,168; 0,832; 0,528; 0,0024

Lösungswege 8.1.1-16 bis 8.1.1-19

8.1.1-20 0,306

8.1.1-21 0,806

8.1.1-22 0,882

8.1.1-23 $9{,}3 \cdot 10^{-8}$

Lösungswege 8.1.1-20 bis 8.1.1-23

Lösungen

8.1.1-24 a) 0,0297 b) 0,6734

8.1.1-25 a) 0,028 b) 0,0714

8.1.1-26 a) 0,9428; 0,9979 b) 0,0572; 0,6643 Lösungswege 8.1.1-24 bis 8.1.1-26

8.1.1-7 Lösungsweg

15 günstige von 36 möglichen Fällen: $p = \frac{15}{36} = 0{,}417$

8.1.1-8 Lösungsweg

Ereignis A: Werfen einer ungeraden Augenzahl (1, 3, 5)
Ereignis B: Werfen einer Augenzahl ≥ 5 (5, 6)

Allgemeiner Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0{,}667$

8.1.1-9 Lösungsweg

Ereignis A: 1. Test wird nicht bestanden
Ereignis B: 2. Test wird nicht bestanden

a)
1. Lösungsweg (allgemeiner Additionssatz)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{20} + \frac{14}{20} - \frac{6}{20} = 0{,}8$$

2. Lösungsweg (einander ausschließende Ereignisse)

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = \frac{2}{20} + \frac{8}{20} + \frac{6}{20} = 0{,}8$$

3. Lösungsweg (komplementäres Ereignis)

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{4}{20} = 0{,}8$$

b) (bedingte Wahrscheinlichkeiten)

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{12}{20}} = 0{,}333$$

8.1.1-10 Lösungsweg

Ereignis A: Ziehen einer weißen Kugel

a) $P(A)=\frac{6}{20}=0,3$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,3=0,7$

8.1.1-11 Lösungsweg

a) 1. Lösungsweg (Kombinationen ohne Wiederholung): $p=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{3}{38}=0,0789$

2. Lösungsweg (bedingte Wahrscheinlichkeiten)
Ereignis A: erste Kugel weiß
Ereignis B: zweite Kugel weiß

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}=0,079$$

b) 1. Lösungsweg (Kombinationen ohne Wiederholung): $p=\frac{\binom{14}{2}}{\binom{20}{2}}=\frac{91}{190}=0,4789$

2. Lösungsweg (bedingte Wahrscheinlichkeiten)
Ereignis A: erste Kugel weiß
Ereignis B: zweite Kugel weiß

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{14}{20}\cdot\frac{13}{19}=\frac{91}{190}=0,4789$$

8.1.1-12 Lösungsweg

a) 1. Lösungsweg (Variationen mit Wiederholung): $p=\frac{6^2}{20^2}=0,090$

2. Lösungsweg (Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse)
Ereignis A: erste Kugel weiß
Ereignis B: zweite Kugel weiß

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{6}{20}\cdot\frac{6}{20}=0,090$$

b) 1. Lösungsweg (Variationen mit Wiederholung): $p=\frac{14^2}{20^2}=0,490$

2. Lösungsweg (Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse)
Ereignis A: erste Kugel weiß
Ereignis B: zweite Kugel weiß

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{14}{20}\cdot\frac{14}{20}=0,490$$

8.1.1-13 Lösungsweg
(Kombinationen ohne Wiederholung)

a) $p = \dfrac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{12}{19} = 0{,}6316$

b) $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{3}{95} = 0{,}0316$

c) Komplement zu b) $p = 1 - 0{,}0316 = 0{,}9684$

8.1.1-14 Lösungsweg
(Kombinationen ohne Wiederholung)

a) $p = \dfrac{\binom{87}{7}}{\binom{102}{7}} = \dfrac{38\,191\,869}{120\,699\,040} = 0{,}3164$

b) $p = \dfrac{\binom{87}{6}\cdot\binom{15}{1}}{\binom{102}{7}} = \dfrac{4\,243\,541}{10\,345\,632} = 0{,}4102$

c) $p = \dfrac{\binom{87}{3}\cdot\binom{15}{4}}{\binom{102}{7}} = \dfrac{81\,055}{10\,345\,632} = 0{,}0078$

d) $p = \dfrac{\binom{87}{0}\cdot\binom{15}{7}}{\binom{102}{7}} = \dfrac{13}{37\,306\,976} = 0{,}000\,000\,348\,46 = 0{,}348\cdot 10^{-6} = 3{,}48\cdot 10^{-7}$

(vgl. auch hypergeometrische Verteilung)

8.1.1-15 Lösungsweg
(Kombinationen ohne Wiederholung)

a) $p = \dfrac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{1}{13\,983\,816} = 0{,}000\,000\,071\,511$

b) $p = \dfrac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{43}{2\,330\,636} = 0{,}000\,018\,450$

c) $p = \dfrac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{645}{665\,896} = 0{,}000\,968\,62$

d) $p = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{8\,815}{499\,422} = 0{,}017\,65$

(vgl. auch hypergeometrische Verteilung)

8.1.1-16 Lösungsweg

$$P(E_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = 0{,}2$$

$$P(E_2) = 1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{0}{4} = 1$$

$$P(E_3) = P(E_1) + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{0}{4} = 0{,}2$$

$$P(E_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}2$$

8.1.1-17 Lösungsweg

$$P(E_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$$

$$P(E_2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}375$$

$$P(E_3) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}375$$

$$P(E_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$$

$$P(E_5) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}875$$

$$P(E_6) = P(E_3) + P(E_4) = 0{,}5$$

$$P(E_7) = P(E_1) + P(E_2) = 0{,}5$$

$$P(E_8) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0{,}875$$

8.1.1-18 Lösungsweg

$$P(E_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}028$$

$$P(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = 0{,}056$$

$$P(E_3) = P(E_1) + P(E_2) = 0{,}083$$

$$P(E_4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = 0{,}083$$

8.1.1-19 Lösungsweg

$$P(E_1) = \left(\frac{7}{10}\right)^5 = 0{,}168$$

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 0{,}832$$

$$P(E_3) = P(E_1) + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 \cdot 5 = 0{,}528$$

$$P(E_4) = \left(\frac{3}{10}\right)^5 = 0{,}0024$$

(vgl. auch Binomialverteilung)

8.1.1-20 Lösungsweg
Ereignis A: 1. Wurf eine "6"
Ereignis B: 2. Wurf eine "6"

1. Lösungsweg (allgemeiner Additionssatz)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}306$$

2. Lösungsweg (komplementäres Ereignis)

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}306$$

8.1.1-21 Lösungsweg
Ereignis A: mindestens einmal "6"

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 0{,}806$$

8.1.1-22 Lösungsweg
Ereignis A: bei mindestens einer Person reduziert sich die Krankschreibung

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^6 = 0{,}882$$

8.1.1-23 Lösungsweg (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$p = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{32}{10}} = \frac{6}{64\,512\,240} = 9{,}300 \cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,093\,005\,6$$

8.1.1-24 Lösungsweg
Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von BAYES
Ereignisse: A_i Bauelement wird auf der Anlage i produziert
B Bauelement ist Ausschuss

gegeben: $P(A_1) = 0{,}2 \qquad P(B \mid A_1) = 0{,}014$

$P(A_2) = 0{,}3 \qquad P(B \mid A_2) = 0{,}023$

$P(A_3) = 0{,}5 \qquad P(B \mid A_3) = 0{,}040$

a) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)$

$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}014 + 0{,}3 \cdot 0{,}023 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}0297 \mathrel{\hat{=}} 2{,}97\,\%$

b) $P(A_3 \mid B) = \dfrac{P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}{P(B)} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}04}{0{,}0297} = 0{,}6734 \mathrel{\hat{=}} 67{,}34\,\%$

8.1.1-25 Lösungsweg
Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von BAYES
Ereignisse: A_i Bauelement wird in der Abteilung i produziert
B Bauelement ist Ausschuss

gegeben: $P(A_1) = 0{,}2 \qquad P(B \mid A_1) = 0{,}01$

$P(A_2) = 0{,}3 \qquad P(B \mid A_2) = 0{,}02$

$P(A_3) = 0{,}5 \qquad P(B \mid A_3) = 0{,}04$

a) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)$

$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}028 \mathrel{\hat{=}} 2{,}8\,\%$

b) $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}01}{0{,}028} = 0{,}0714 \mathrel{\hat{=}} 7{,}14\,\%$

8.1.1-26 Lösungsweg
Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Satz von BAYES
Ereignisse: A_1 Erzeugnis ist normgerecht
$A_2 = \overline{A}_1$ Erzeugnis ist nicht normgerecht
B Erzeugnis wird als normgerecht ausgewiesen

gegeben: $P(A_1) = 0{,}96 \qquad P(B \mid A_1) = 0{,}98$

$P(A_2) = 0{,}04 \qquad P(B \mid A_2) = 0{,}05$

a) $P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)$

$P(B) = 0{,}96 \cdot 0{,}98 + 0{,}04 \cdot 0{,}05 = 0{,}9428 \mathrel{\hat{=}} 94{,}28\,\%$

$P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}96 \cdot 0{,}98}{0{,}9428} = 0{,}9979 \mathrel{\hat{=}} 99{,}79\,\%$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}0572$

$P(A_2 \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A_2) \cdot P(\overline{B} \mid A_2)}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}95}{0{,}0572} = 0{,}6643 \mathrel{\hat{=}} 66{,}43\,\%$

Lösungen

8.1.2-1 0,343; 0,441; 0,189; 0,027

8.1.2-2 0,705; 14

8.1.2-3 0,693 Lösungswege 8.1.2-1 bis 8.1.2-3

8.1.2-4 0,2834; 0,2873

8.1.2-5 0,065 64 Lösungswege 8.1.2-4 bis 8.1.2-5

8.1.2-6 90

8.1.2-7 a) 0,018 b) 0,762

8.1.2-8 a) 0,569 b) 0,579 Lösungswege 8.1.2-6 bis 8.1.2-8

8.1.2-1 Lösungsweg

Binomialverteilung $p = 0{,}3;\quad n = 3$

$$p_0 = \binom{3}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot (1-0{,}3)^3 = 0{,}343$$

$$p_1 = \binom{3}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot (1-0{,}3)^{3-1} = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}441$$

$$p_2 = \binom{3}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot (1-0{,}3)^{3-2} = 3 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}189$$

$$p_3 = \binom{3}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot (1-0{,}3)^{3-3} = 0{,}3^3 = 0{,}027$$

Die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten ist eins: $\sum_0^3 p_i = 0{,}343 + 0{,}441 + 0{,}189 + 0{,}027 = 1$

8.1.2-2 Lösungsweg

Binomialverteilung $p = 0{,}16;\quad n = 7;\quad i = 0$

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = p_0 = \binom{7}{0} \cdot 0{,}16^0 \cdot (1-0{,}16)^7 = 0{,}295 \mathrel{\hat{=}} 29{,}5\,\%$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_0 = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}16^0 \cdot (1-0{,}16)^{n-0} \geq 0{,}9$

$$0{,}84^n \leq 0{,}1 \quad \Big|\ \ln\ldots$$

$$n \cdot \ln 0{,}84 \leq \ln 0{,}1 \quad \Big|\ :\ln 0{,}9 < 0$$

$$n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}84} = 13{,}2$$

Der Urlaub sollte mindestens 14 Tage geplant werden.

8.1.2-3 Lösungsweg

Hypergeometrische Verteilung $N = 30,\quad M = 10,\quad n = 6$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}065 + 0{,}261 + 0{,}367 = 0{,}693$$

$$P(X = i) = \frac{\binom{M}{i} \cdot \binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{i}}$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} = 0{,}065 \qquad P(X=1) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{20}{5}}{\binom{30}{6}} = 0{,}261 \qquad P(X=2) = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{4}}{\binom{30}{6}} = 0{,}367$$

8.1.2-4 Lösungsweg
Binomialverteilung oder näherungsweise POISSONverteilung

Binominalverteilung $p = 0{,}025;\quad n = 100$

$$P(X \le 1) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = p_0 + p_1 = 0{,}975^{100} + 100 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}975^{99} = 0{,}2834$$

POISSONverteilung: $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}025 = 2{,}5$

$$P(X \le 1) = p_0 + p_1 = \frac{2{,}5^0}{0\,!} \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5} + \frac{2{,}5^1}{1\,!} \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5} = (1+2{,}5) \cdot \mathrm{e}^{-2{,}5} = 0{,}2873$$

8.1.2-5 Lösungsweg

POISSONverteilung $\lambda = \dfrac{90}{60} = 1{,}5$ (Kundenanforderungen je Minute)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$$

$$P(X \le 3) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{3} \frac{\lambda^k}{k\,!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3}\right) \mathrm{e}^{-\lambda} = \left(1 + 1{,}5 + \frac{1{,}5^2}{2} + \frac{1{,}5^3}{6}\right) \mathrm{e}^{-1{,}5} = 0{,}9344$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - 0{,}9344 = 0{,}0656 \mathrel{\hat{=}} 6{,}56\,\%$$

8.1.2-6 Lösungsweg
Binomialverteilung p("nicht normgerecht") = 0,05; n gesucht

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^n \cdot (1 - 0{,}05)^{n-0} = 1 - 0{,}95^n = 0{,}99$$

$$1 - 0{,}95^n = 0{,}99$$

$$0{,}95^n = 0{,}01 \quad |\lg \ldots$$

$$n \cdot \lg 0{,}95 = \lg 0{,}01$$

$$n = \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}95} = 89{,}78 \approx 90 \text{ Stichproben}$$

8.1.2-7 Lösungsweg
POISSONverteilung $E(X) = \lambda = 4$

a) $P(X = 0) = \dfrac{\lambda^i \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{i\,!} = \dfrac{4^0 \cdot \mathrm{e}^{-4}}{0\,!} = \mathrm{e}^{-4} = 0{,}018$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - \left[\frac{4^0 \cdot \mathrm{e}^{-4}}{0\,!} + \frac{4^1 \cdot \mathrm{e}^{-4}}{1\,!} + \frac{4^2 \cdot \mathrm{e}^{-4}}{2\,!}\right]$$

$$= 1 - [1 + 4 + 8] \cdot \mathrm{e}^{-4} = 1 - 13 \cdot \mathrm{e}^{-4} = 0{,}762 \mathrel{\hat{=}} 76{,}2\,\%$$

8.1.2-8 Lösungsweg
a) Hypergeometrische Verteilung, $N = 36$, $M = 6$, $n = 3$, $i = 0$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{30}{3}}{\binom{36}{3}} = 0{,}568\,627$$

b) Binomialverteilung, $n = 3$, $i = 0$, $p = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}578\,704$$

Lösungen

8.1.3-1 a) $F(x)=\begin{cases} 0\ , & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 1\ , & 2 < x < \infty \end{cases}$ b) $\frac{4}{3}$ Lösungsweg

8.1.3-2 a) ja b) siehe Lösungsweg

c) $F(x)=\begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 2x^2 & , 0 < x \le \frac{1}{2} \\ -2x^2+4x-1 & , \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$ d) 0,75

e) $E(X) = 0{,}5$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{24}} = \underline{\underline{\frac{1}{12}\sqrt{6}}}$ Lösungsweg

8.1.3-3 a) $c = \frac{3}{8}$ b) $F(x)=\begin{cases} 0 & , & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{8}(x^3-9x^2+27x-19) & , & 1 \le x \le 3 \\ 1 & , & 3 < x < \infty \end{cases}$

c) siehe Lösungsweg d) $E(X) = \frac{3}{2}$ $\sigma = \sqrt{0{,}15} = 0{,}387$ Lösungsweg

8.1.3-4 a) $F(x)=\begin{cases} 0\ , & x < 6 \\ \frac{x-6}{4}, & 6 \le x \le 10 \\ 1\ , & x > 10 \end{cases}$ b) 0,125

c) 8 d) 1,155 e) siehe Lösungsweg Lösungsweg

Lösungen

8.1.3-5 a) 0,864 b) 2,5 h

8.1.3-6 a) 0,283 b) 0,264

8.1.3-7 a) 3 h 20 min b) 0,451 c) 0,549
d) 0 e) 7 Std. und 40 ½ min Lösungswege 8.1.3-5 bis 8.1.3-7

8.1.3-8 a) 0,035 b) 0,931 c) 0,035

8.1.3-9 a) 2,13 b) 1,55 Lösungswege 8.1.3-8 bis 8.1.3-9

8.1.3-1 Lösungsweg

a) $F(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\cdot z \ \mathrm{d}z = \frac{1}{4}z^2\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ , & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 \ , & 0 \le x \le 2 \\ 1 \ , & 2 < x < \infty \end{cases}$$

b) $E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}\cdot x \ \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

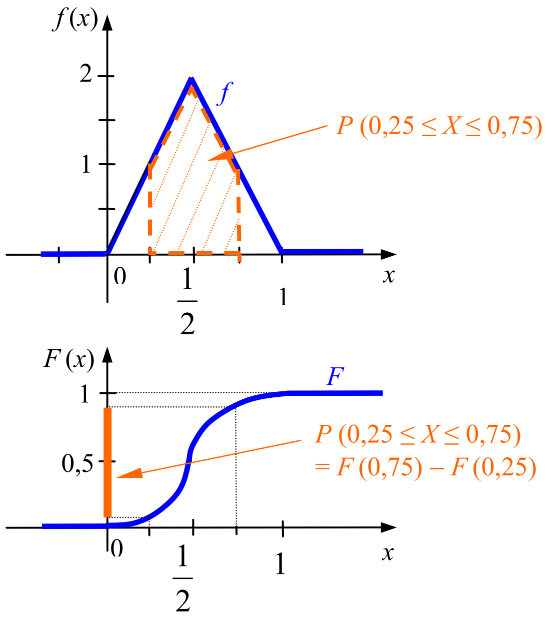
8.1.3-2 Lösungsweg

a) Ja. **Begründung:** f ist positiv und die Vollständigkeitsrelation ist erfüllt

Der Flächeninhalt der Fläche unter der Funktion ist gleich 1.

Hinweis: Dreiecksformel!

b), c) und d)



c)

$x \le 0$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}z = 0$

Hinweis: Rechnungen notwendig!

$0 < x \le 0{,}5$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}z + \int\limits_{0}^{x} 4z\,\mathrm{d}z = 2x^2$

$0{,}5 < x \le 1$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}z + \int\limits_{0}^{0{,}5} 4z\,\mathrm{d}z + \int\limits_{0{,}5}^{x} (4-4z)\,\mathrm{d}z$

$$= 0 + 0{,}5 + (-2x^2 + 4x - 1{,}5) = -2x^2 + 4x - 1$$

$x > 1$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}z + \int\limits_{0}^{0{,}5} 4z\,\mathrm{d}z + \int\limits_{0{,}5}^{1} (4-4z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}z$

$$= 0 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 2x^2 & , 0 < x \le \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 4x - 1 & , \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$

Zu d)

8.1.3-2 Lösungsweg Zurück

d)

$P(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = (-2\cdot 0{,}75^2 + 4\cdot 0{,}75 - 1) - (2\cdot 0{,}25^2) = 0{,}75$

e): **Hinweis**: Rechnungen notwendig!

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{0,5} x\cdot 4x\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} x\cdot(4-4x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x\cdot 0\,\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{0,5} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4x\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot (4-4x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{0,5} \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\cdot 4x\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\cdot (4-4x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{0,5} (4x^3 - 4x^2 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} (-4x^3 + 8x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{0}^{0,5} + \left(-x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_{0,5}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) - 1 + \frac{8}{3} - \frac{5}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

ODER:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x - [E(X)]^2$$

$$= \int_{0}^{0,5} x^2 \cdot 4x\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} x^2\cdot(4-4x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \int_{0}^{0,5} 4x^3\,\mathrm{d}x + \int_{0,5}^{1} (4x^2 - 4x^3)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{1}{2}\right]^2$$

$$= x^4\Big|_{0}^{0,5} + \left(\frac{4x^3}{3} - x^4\right)\Bigg|_{0,5}^{1} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{16} - 0 + \frac{4}{3} - 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{24}} = \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

8.1.3-3 Lösungsweg

a) Die Vollständigkeitsrelation muss erfüllt werden:

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + c\int_{1}^{3}(x-3)^2\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 1$$

$$c\cdot\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$c\cdot\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_1^3 = 1$$

$$c\cdot\left[\frac{3^3}{3}-3\cdot 3^2+9\cdot 3-\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+9\cdot 1\right)\right]=1$$

$c\cdot\dfrac{8}{3}=1,\quad c=\dfrac{3}{8}$ Mit diesem $c=\dfrac{3}{8}$ wird $f>0$ eine Dichtefunktion.

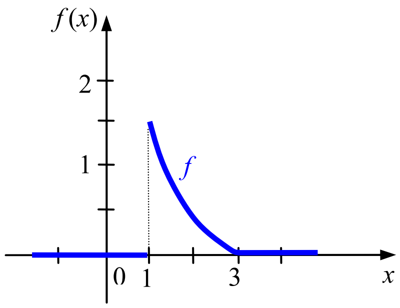
b)

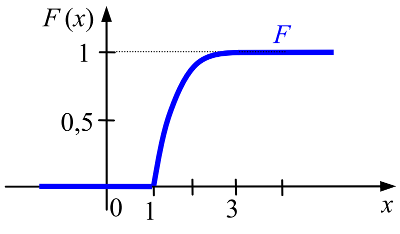
$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad -\infty < x < 1\\ \frac{1}{8}(x^3-9x^2+27x-19) & , \quad 1\le x\le 3\\ 1 & , \quad 3 < x < \infty\end{cases}$$

$1\le x\le 3$:

$$F(x)=\int_1^x \frac{3}{8}(z-3)^2\,\mathrm{d}z=\frac{3}{8}\left[\frac{z^3}{3}-3z^2+9z\right]_1^x=\frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x-\frac{1}{3}+3-9\right]=\frac{1}{8}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{27}{8}x-\frac{19}{8}$$

c)





x	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	1,5	0,843	0,375	0,093	≈ 0
$F(x)$	0,0	0,578	0,875	0,984	≈ 1

Zu d)

8.1.3-3 Lösungsweg Zurück

d)

$$E(X)=\frac{3}{8}\cdot\int_1^3 x\cdot(x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\int_1^3 (x^3-6x^2+9x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_1^3$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\left[\frac{81}{4}-2\cdot 27+\frac{9}{2}9-\frac{1}{4}+2-\frac{9}{2}\right]=\frac{3}{8}\cdot[4]=\frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-E(X)\right)^2\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}(x-3)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\int_1^3 (x^2-3x+\frac{9}{4})\cdot(x^2-6x+9)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\int_1^3 (x^4-9x^3+29{,}25x^2-40{,}5x+20{,}25)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\left[\frac{x^5}{5}-\frac{9}{4}x^4+\frac{29{,}25}{3}x^3-20{,}25x^2+20{,}25x\right]_1^3$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\left[\frac{243}{5}-\frac{9}{4}\cdot 81+\frac{29{,}25}{3}\cdot 27-20{,}25\cdot 9+20{,}25\cdot 3-\frac{1}{5}+\frac{9}{4}-\frac{29{,}25}{3}+20{,}25-20{,}25\right]=0{,}15$$

$$\sigma=\sqrt{0{,}15}=0{,}387$$

8.1.3-4 Lösungsweg

Gleichverteilung mit: $a = 6$, $b = 10$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 6 \le x \le 10 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

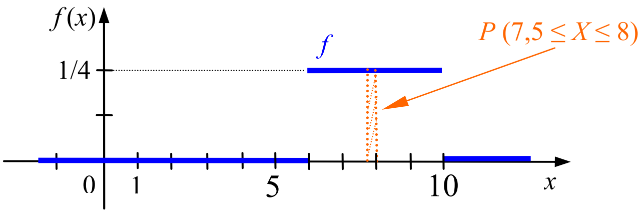
a) $$F(x) = \begin{cases} 0\;, & x < 6 \\ \frac{x-6}{4}, & 6 \le x \le 10 \\ 1\;, & x > 10 \end{cases} \qquad F(x) = \int_6^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}[z]_6^x = \frac{1}{4}(x-6)$$

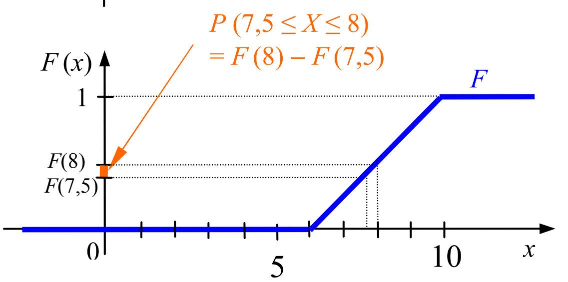
b) $$P(7{,}5 \le X \le 8) = F(8) - F(7{,}5) = \frac{8-6}{4} - \frac{7{,}5-6}{4} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

c) $$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{6+10}{2} = 8$$

d) $$\sigma = \frac{b-a}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{10-6}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{4}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} = 1{,}155$$

e)





8.1.3-5 Lösungsweg
Exponentialverteilung $\lambda = 0{,}4$

a) $P(X \leq 5) = F(5) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}4 \cdot 5} = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0{,}8646$

b) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ h}$

8.1.3-6 Lösungsweg

Exponentialverteilung $E(X) = 3;\quad \lambda = \dfrac{1}{3}$

a) $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3} \cdot 1} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} = 0{,}283\,47 \mathrel{\hat{=}} 28{,}35\,\%$

b) $P(X \geq 4) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3} \cdot 4}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}} = 0{,}263\,60 \mathrel{\hat{=}} 26{,}36\,\%$

8.1.3-7 Lösungsweg
Exponentialverteilung $\lambda = 0{,}3$

a) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}3} = \dfrac{10}{3} \text{ h} \mathrel{\hat{=}} 3 \text{ h } 20 \text{ min}$

b) $P(X < 2) = F(2) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3 \cdot 2} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} = 1 - 0{,}548\,81 = 0{,}451\,19 \mathrel{\hat{=}} 45{,}12\,\%$

c) $P(X \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-0{,}3 \cdot 2}) = \mathrm{e}^{-0{,}6} = 0{,}548\,81 \mathrel{\hat{=}} 54{,}88\,\%$

d) $P(X = 2) = P(2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(2) = 0 \mathrel{\hat{=}} 0\,\%$

e) $P(X < x) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3 \cdot x} = 0{,}9$

$0{,}1 = \mathrm{e}^{-0{,}3 \cdot x} \quad \big|\ \ln \ldots$

$\ln 0{,}1 = -0{,}3 \cdot x$

$x = \dfrac{\ln 0{,}1}{-0{,}3} = 7{,}675$

$x = 7{,}675$ h, das sind 7 Stunden und 40 ½ Minuten

8.1.3-8 Lösungsweg

Normalverteilung $\quad \mu = 1\,020 \quad \sigma^2 = 121 \quad \sigma = 11$

a) $P(X < 1\,000) = F(1\,000) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1\,000 - 1\,020}{11}\right) = \Phi\left(\frac{-20}{11}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20}{11}\right)$

$= 1 - \Phi(1{,}818) = 1 - 0{,}9655 = 0{,}0345 \mathrel{\hat{=}} 3{,}45\,\%$

b) $P(1\,000 \le X \le 1\,040) = F(1\,040) - F(1\,000) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

$= \Phi\left(\frac{1\,040 - 1\,020}{11}\right) - \Phi\left(\frac{1\,000 - 1\,020}{11}\right) = \Phi\left(\frac{20}{11}\right) - \Phi\left(\frac{-20}{11}\right) = \Phi\left(\frac{20}{11}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{20}{11}\right)\right]$

$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{20}{11}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(1{,}818) - 1 = 2 \cdot 0{,}9655 - 1 = 0{,}931 \mathrel{\hat{=}} 93{,}1\,\%$

c) $P(X > 1\,040) = 1 - P(X < 1\,000) - P(1\,000 \le X \le 1\,040) = 1 - 0{,}0345 - 0{,}931 = 0{,}0345 \mathrel{\hat{=}} 3{,}45\,\%$

Oder:

$P(X > 1\,040) = 1 - P(X \le 1\,040) = 1 - F(1\,040) = 1 - \Phi\left(\frac{1\,040 - 1\,020}{11}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{20}{11}\right)$

$= 1 - \Phi(1{,}818) = 1 - 0{,}9655 = 0{,}0345 \mathrel{\hat{=}} 3{,}45\,\%$

8.1.3-9 Lösungsweg

Normalverteilung

a) $F(104) - F(96) = 0{,}94$

$F(104) - F(96) = \Phi\left(\frac{104-100}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{96-100}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}94$

$2 \cdot \Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}94$

$\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = \frac{0{,}94 + 1}{2} = 0{,}97$

$\frac{4}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}97) = 1{,}881$

$\sigma = \frac{4}{1{,}881} = 2{,}13$

b) $\Phi\left(\frac{4}{\sigma}\right) = \frac{0{,}99 + 1}{2} = 0{,}995$

$\frac{4}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}995) = 2{,}575$

$\sigma = \frac{4}{2{,}575} = 1{,}55$

Lösungen

8.2.1-1

	quantitativ	qualitativ	diskret	stetig	quasi-stetig	Skalenniveau
a)	x			x		Verhältnisskala
b)	x			x		Intervallskala
c)	x		x			Verhältnisskala
d)	x		x	x	x	Verhältnisskala
e)		x				Nominalskala
f)	x		x*		x*	Verhältnisskala
g)		x				Ordinalskala
h)		x				Ordinalskala
i)	x			x		Verhältnisskala
j)		x				Ordinalskala

Hinweis: Die Zuordnungen sind teilweise von der Interpretation abhängig.
*: Ein Merkmal könnte bei Stückgut diskret, bei Flüssigkeiten stetig und bei Schüttgut quasi-stetig sein.

8.2.1-2 a) 36, 37, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 43 b) 39,5
c) $x_{D_1} = 39$, $x_{D_2} = 40$, $\tilde{x} = 39{,}5$ und $R = 7$ d) $\sigma^2 = 4{,}25$, $\sigma = 2{,}06$ e) $v = 0{,}052$
f) und g) siehe Lösungsweg Lösungsweg

8.2.1-3
V_1: a) $\bar{x} = 3{,}5$ b) $\sigma^2 = 1{,}65$; $\sigma = 1{,}2845$ c) $v = 0{,}367$ d) $S(X) = 0$; also symmetrisch
V_2: a) $\bar{x} = 3{,}05$ b) $\sigma^2 = 1{,}6475$; $\sigma = 1{,}2835$ c) $v = 0{,}421$ d) $S(X) = 0{,}474$; also linkssteil

8.2.1-4
a) $\tilde{x} = 450$ $\bar{x} = 440$
b) $QA = 100$ $\sigma = 111{,}36$ c) und d) siehe Lösungsweg Lösungsweg

8.2.1-5 a) und b) siehe Lösungsweg c) 0,925
d) $x_{0,25} = 32{,}50$; $x_{0,75} = 81{,}82$ Lösungsweg

8.2.1-6 a), c), d) und e) siehe Lösungsweg
b) $\bar{x} = 665{,}5$; $x_{0,25} = 509{,}10$; $x_{0,5} = 626{,}19$; $x_{0,75} = 745{,}24$; $x_D = 500$ €;
$\sigma^2 = 45\,872{,}25$; $\sigma = 214{,}18$; $v = 0{,}3218$
f) 9 982 500 €
g) 0,425 Lösungsweg

8.2.1-2 Lösungsweg

a) 36, 37, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 42, 43

Arbeitstabelle

x_j	h_j	f_j	F_j	$x_j \cdot h_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
36	1	0,10	0,10	36	129,6
37	1	0,10	0,20	37	136,9
38	1	0,10	0,30	38	144,4
39	2	0,20	0,50	78	304,2
40	2	0,20	0,40	80	320,0
41	1	0,10	0,50	41	168,1
42	1	0,10	0,60	42	176,4
43	1	0,10	0,70	43	184,9
$\sum$	10			395	1 564,5

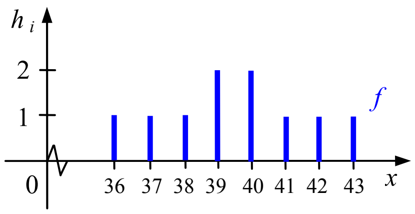
b) $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot f_j = \frac{395}{10} = 39{,}5$

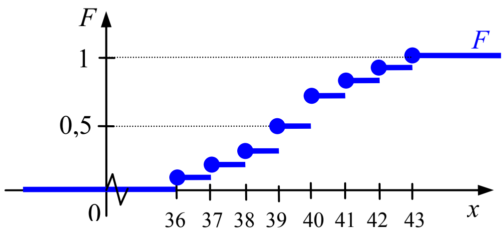
c) $x_{D_1} = 39$, $x_{D_2} = 40$, $\tilde{x} = 39{,}5$, $R = 7$

d) $\sigma^2 = \sum_j x_j^2 \cdot p_j - \bar{x} = 1\,564{,}5 - 39{,}5^2 = 4{,}25$; $\sigma = 2{,}06$

e) $v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2{,}06}{39{,}5} = 0{,}052$

f)





8.2.1-4 Lösungsweg

Statistische Masse: 10 Wismarer Studenten
Statistische Einheit: ein Student
Merkmal: Monatseinkommen
Skalenniveau: metrisch, Verhältnisskala

a)
Arbeitstabelle

x_j	h_j	f_j	F_j	$x_j \cdot h_j$	$x_j^2 \cdot f_j$	$(x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j$
200	1	0,10	0,10	200	4 000	5 760,00
350	1	0,10	0,20	350	12 250	810,00
400	2	0,20	0,40	800	32 000	320,00
450	2	0,20	0,60	900	40 500	20,00
500	3	0,30	0,90	1 500	75 000	1 080,00
650	1	0,10	1,00	650	42 250	4 410,00
$\sum$	10			4 400	206 000	12 400,00

Median: $\tilde{x} = \dfrac{x_5 + x_6}{2} = \dfrac{450 + 450}{2} = 450$

arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \sum x_i f_i = \dfrac{4\,400}{10} = 440$

b) Quartilsabstand: $QA = x_{0,75} - x_{0,25} = 500 - 400 = 100$

$x_{0,75} = 500 \qquad x_{0,25} = 400$

Die Einkommensunterschiede der mittleren 50 % betragen maximal 100 €.

Standardabweichung: $\sigma^2 = \sum (x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j = 12\,400\,, \qquad \sigma = 111{,}36$

Die Einkommen weichen durchschnittlich 111,36 € vom Mittelwert mit 440 € ab.

Zu c)

8.2.1-4 Lösungsweg Zurück

c)

Arbeitstabelle

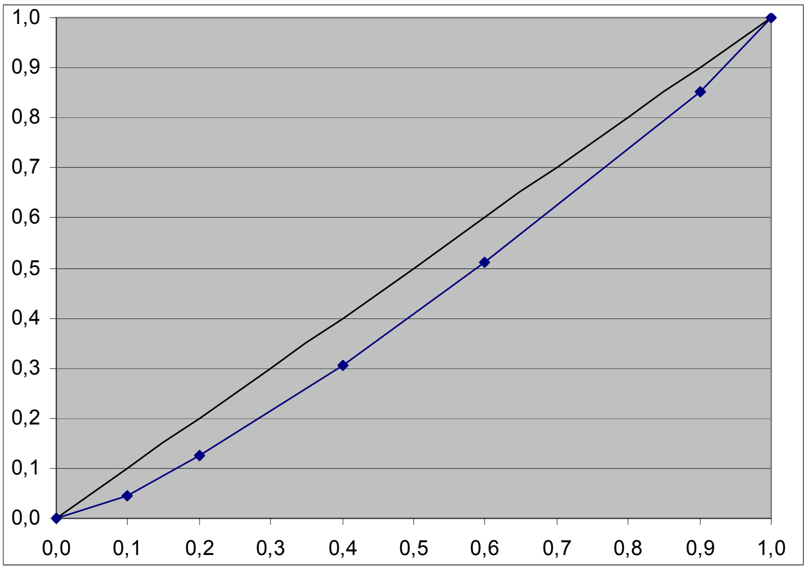
x_j	h_j	f_j	F_j	$x_j \cdot h_j$	p_j	P_j	$A(L)$
200	1	0,10	0,10	200	0,045	0,045	0,0023
350	1	0,10	0,20	350	0,080	0,125	0,0085
400	2	0,20	0,40	800	0,182	0,307	0,0432
450	2	0,20	0,60	900	0,205	0,511	0,0818
500	3	0,30	0,90	1 500	0,341	0,852	0,2045
650	1	0,10	1,00	650	0,148	1,000	0,0926
2 550	10			4 400			0,4330

$$p_k = \frac{x_k}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

$$A(L) = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_{i-1} + P_i}{2} \cdot f_i \quad \text{mit } P_0 = 0$$

LORENZkurve



$$G = \frac{0{,}5 - A(L)}{0{,}5} = \frac{0{,}5 - 0{,}4330}{0{,}5} = 0{,}134$$

Interpretation

Der GINI-Koeffizient weist mit 0,134 auf eine sehr schwache relative Konzentration hin, die Einkommen der 10 Studierenden sind also nicht sehr ungleich verteilt.

d)

Erhöhen sich alle Merkmalsausprägungen um 100 €, steigen auch die Quantile um 100 €, der Quartilsabstand bleibt folglich konstant.

Mit den Merkmalsausprägungen steigt auch der arithmetische Mittelwert um 100 €, auch die Standardabweichung als durchschnittliche Abweichung bleibt damit konstant.

Erhöhen sich alle Einkommen um 100 €, steigen die bislang niedrigen Einkommen prozentual (relativ) stärker als die höherer Einkommen. Die Kluft zwischen den Anteilen niedriger Einkommen und denen hoher Einkommen am Gesamtaufkommen wird dadurch geringer, die relative Konzentration der Einkommen nimmt folglich ab.

8.2.1-5 Lösungsweg

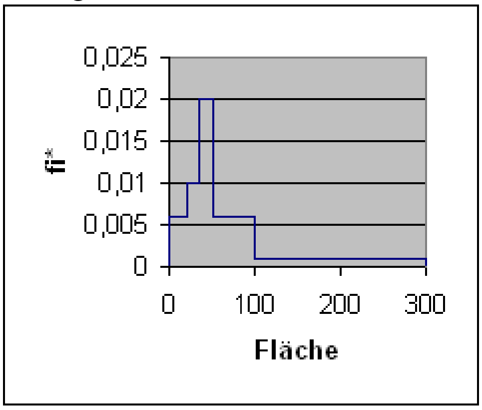
a) Beschreibung des untersuchten statistischen Materials
Statistische Masse: 40 000 landwirtschaftliche Betriebe
Statistische Einheit: ein Betrieb
Merkmal: Fläche
Ausprägung: in ha
Skalenniveau: metrisch, Verhältnisskala

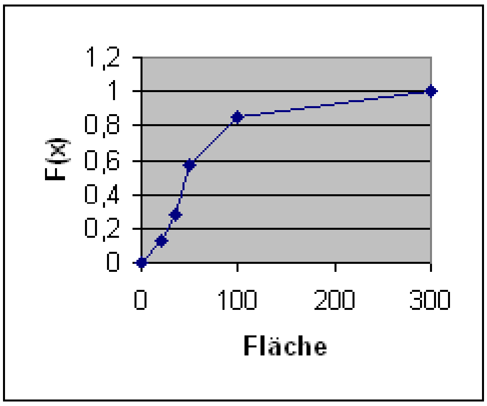
b) Arbeitstabelle

x_j von …	bis unter …	h_j	f_j	F_j	Δx_j	f_j^*	x_j'	$x_j' \cdot f_j$	$(x_j' - \bar{x})^2 \cdot f_j$
0	20	5	0,125	0,125	20	0,006	10	1,25	3,5778
20	35	6	0,150	0,275	15	0,010	27,5	4,13	78,3184
35	50	12	0,300	0,575	15	0,020	42,5	12,75	429,7868
50	100	11	0,275	0,850	50	0,006	75	20,63	1 361,0087
100	300	6	0,150	1,000	200	0,001	200	30,00	5 724,2434
$\sum$		40						68,75	7 596,9350

c) Darstellung der relativen Häufigkeiten und rel. Summenhäufigkeiten

Histogramm





d) Wert der Verteilungsfunktion bei $x = 200$

$F(200) = F(100) + 0{,}150/200 \cdot (200 - 100) = 0{,}85 + 0{,}000\,75 \cdot 100 = 0{,}925$

92,5 % der Betriebe haben eine landwirtschaftlich genutzte Fläche bis zu 200 ha.

e) Berechnung der Quartile

$x_{0,25} = 20 + (0{,}25 - 0{,}125) / 0{,}150 \cdot 15 = 32{,}50$

$x_{0,75} = 50 + (0{,}75 - 0{,}575) / 0{,}275 \cdot 50 = 81{,}82$

8.2.1-6 Lösungsweg

a) Statistische Masse: 1 250 Wohnungen
Statistische Einheit: eine Wohnung
Merkmal: Monatsmiete
Ausprägung: in EUR
Skalenniveau: metrisch, Verhältnisskala

b) Arbeitstabelle

x_j von …	bis unter …	h_j	f_j	F_j	Δx_j	f_j*	x_j'	$x_j' \cdot f_j$	$(x_j' - \bar{x})^2 \cdot f_j$	$x_j'^2 \cdot f_j$
300	450	150	0,120	0,120	150	0,0008	375	45,00	10 126,83	16 875,0
450	550	275	0,220	0,340	100	0,0022	500	110,00	6 025,86	55 000,0
550	750	525	0,420	0,760	200	0,0021	650	273,00	100,91	177 450,0
750	1 000	175	0,140	0,900	250	0,0006	875	122,50	6 144,64	107 187,5
1 000	1 300	125	0,100	1,000	300	0,0003	1 150	115,00	23 474,03	132 250,0
∑		1 250						665,50	45 872,25	488 762,5

$\bar{x} = 665{,}50$

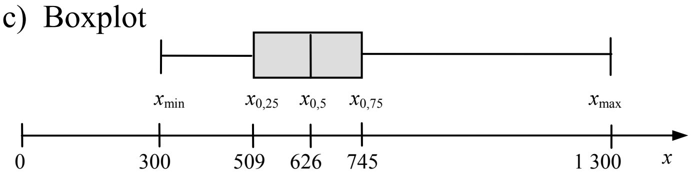
$x_{0,25} = 450 + (0{,}25 - 0{,}12) / 0{,}22 \cdot 100 = 509{,}10$ €

$x_{0,5} = 550 + (0{,}50 - 0{,}34) / 0{,}42 \cdot 200 = 626{,}19$ €

$x_{0,75} = 550 + (0{,}75 - 0{,}34) / 0{,}42 \cdot 200 = 745{,}24$ €

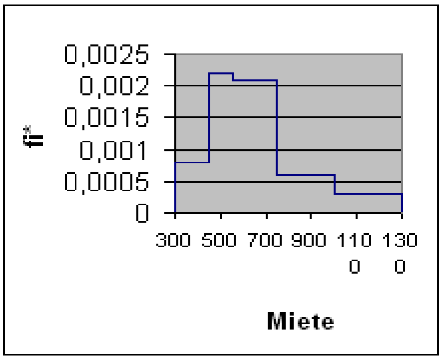
$$f_j{}^* = \frac{f_j}{x_o - x_u} \qquad x_D = 500 \qquad \sigma^2 = 45\,872{,}25 \qquad \sigma = 214{,}18 \qquad v = 0{,}3218$$

c) Boxplot

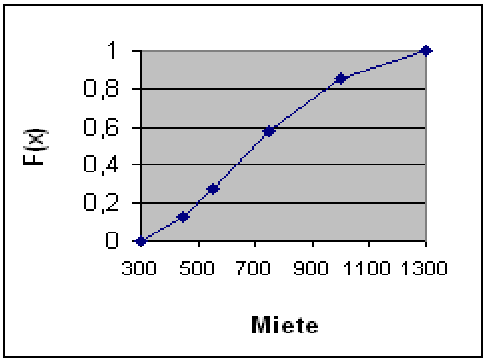


d) und e)

Histogramm der relativen Häufigkeiten



relative Summenhäufigkeiten



f) $\bar{x}\,(x) \cdot 1\,250 \cdot 12 = 665{,}5 \cdot 1\,250 \cdot 12 = 9\,982\,500$ €
Annahme: Innerhalb einer jeden Klasse wird eine Gleichverteilung angenommen. Damit kann die Klassenmitte als Vertreter der Klasse genommen werden.

g) $P(500 \le x \le 700) = F(700) - F(500) = 0{,}655 - 0{,}23 = 0{,}425 \mathrel{\hat{=}} 42{,}5\ \%$
$F(700) = 0{,}34 + 0{,}42 \cdot 150 / 200 = 0{,}655$
$F(500) = 0{,}12 + 0{,}22 \cdot 50 / 100 = 0{,}230$

Lösungen

8.2.2-1

a) Unabhängiges Merkmal: Beschäftigte
Abhängiges Merkmal: Umsatz

b) $\hat{y} = 0{,}43 \cdot x - 3{,}15$

c) siehe Lösungsweg

d) 48

e) $r_{XY} = 0{,}9912$

Lösungsweg

8.2.2-2

a) Die Merkmale sind nicht statistisch unabhängig.

b) 0,491
Die Stärke der statistischen Abhängigkeit der beiden Merkmale ist mäßig.

c) Ein Beispiel:

Geschlecht	Interesse	kein Interesse
männlich	0	20
weiblich	80	0

Lösungsweg

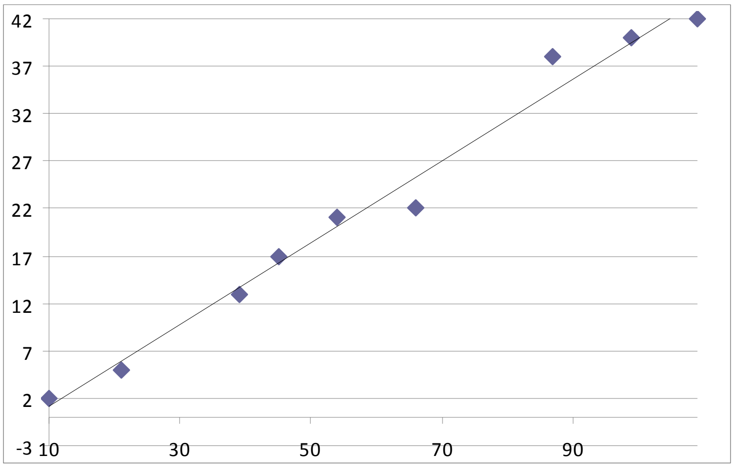
8.2.2-1 Lösungsweg

a) Unabhängiges Merkmal: Beschäftigte (Ursache)
Abhängiges Merkmal: Umsatz (Wirkung)

b)
Arbeitstabelle

i	x_i	y_i	$x_i^{\,2}$	$y_i^{\,2}$	$x_i \cdot y_i$
1	10	2	100	4	20
2	21	5	441	25	105
3	39	13	1 521	169	507
4	45	17	2 025	289	765
5	54	21	2 916	441	1 134
6	66	22	4 356	484	1 452
7	87	38	7 569	1 444	3 306
8	99	40	9 801	1 600	3 960
9	109	42	11 881	1 764	4 578
Σ	**530**	**200**	**40 610**	**6 220**	**15 827**

c)



$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{530}{9} = 58{,}889 \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{200}{9} = 22{,}222$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\cdot\bar{x}^2\right) = \frac{1}{9}(40\,610 - 9\cdot 58{,}889^2) = 1\,044{,}321$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - n\cdot\bar{y}^2\right) = \frac{1}{9}(6\,220 - 9\cdot 22{,}222^2) = 197{,}284$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}\right) = \frac{1}{9}(15\,857 - 9\cdot 58{,}889\cdot 22{,}222)4 = 449{,}914$$

$$\hat{y} = a_0 + a_1\cdot x$$

$$a_1 = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x^2} = \frac{449{,}914}{1\,044{,}321} = 0{,}4308$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\cdot\bar{x} = 22{,}222 - 0{,}4308\cdot 58{,}889 = -3{,}148$$

$$\hat{y} = -3{,}148 + 0{,}4308\cdot x = 0{,}43\cdot x - 3{,}15$$

Der Anstieg von 0,43 bedeutet, dass mit jedem weiteren Beschäftigten mit einem Umsatzzuwachs von 0,43 Mill. € zu rechnen ist.

d)

$$y(120) = 0{,}4308\cdot 120 - 3{,}15 = 48{,}55 \text{ Beschäftigte}$$

Hinweis: Die Regressionsgerade gilt nur im Bereich von x_u bis x_o. Extrapolationen sind mit Unsicherheiten verbunden.

e)

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{449{,}914}{\sqrt{1\,044{,}321\cdot 197{,}284}} = 0{,}9912$$

Es liegt ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen vor.

8.2.2-2 Lösungsweg

a) Die Merkmale sind nicht statistisch unabhängig. Eine Überprüfung kann über die bedingten relativen Häufigkeiten erfolgen.
Ein Viertel der männlichen haben Interesse, drei Viertel nicht. Eine statistische Unabhängigkeit vom Geschlecht läge dann vor, wenn sich dieses Verhältnis auch bei den weiblichen annähernd darstellen würde. Bei den weiblichen haben aber über 80 % Interesse und nur weniger als 20 % nicht.

b) $$u = 100 \cdot \left[\left(\frac{5^2}{20 \cdot 70} + \frac{15^2}{20 \cdot 30} + \frac{65^2}{80 \cdot 70} + \frac{15^2}{80 \cdot 30} \right) - 1 \right] = 24{,}107$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \frac{u}{\min[(m-1),(n-1)]}} = \sqrt{\frac{1}{100} \cdot \frac{24{,}107}{\min[(2-1),(2-1)]}} = \sqrt{\frac{24{,}107}{100}} = \sqrt{0{,}24107} = 0{,}491$$

Die Stärke der statistischen Abhängigkeit der beiden Merkmale ist nicht sehr erheblich.

c) Ein Beispiel:

Geschlecht	Interesse	kein Interesse
männlich	0	20
weiblich	80	0

Kapitel 8	Abschnitt 8.2.3		Aufgaben ◄	

Lösungen

8.2.3-1

$IP_1^2(L) = 0{,}7575$ $IP_1^2(P) = 0{,}7370$

$IM_1^2(L) = 0{,}8412$ $IM_1^2(P) = 0{,}8184$ Lösungsweg

Kapitel 8	Abschnitt 8.2.3		Aufgaben ◄	

8.2.3-1 Lösungsweg

$$IP_1^2(L) = \frac{1{,}5 \cdot 200 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 180}{1 \cdot 200 + 1{,}5 \cdot 150 + 6 \cdot 180} = 0{,}7575$$

Die Preisminderung im Jahr 2 gegenüber dem Jahr 1 beträgt 76 % auf Basis der Mengen des Jahres 1.

$$IP_1^2(P) = \frac{1{,}5 \cdot 150 + 2 \cdot 120 + 3 \cdot 156}{1 \cdot 150 + 1{,}5 \cdot 120 + 6 \cdot 156} = 0{,}7370$$

Die Preisminderung im Jahr 2 gegenüber dem Jahr 1 beträgt 74 % auf Basis der Mengen des Jahres 2.

$$IM_1^2(L) = \frac{150 \cdot 1 + 120 \cdot 1{,}5 + 156 \cdot 6}{200 \cdot 1 + 150 \cdot 1{,}5 + 180 \cdot 6} = 0{,}8412$$

Die Mengenminderung im Jahr 2 gegenüber dem Jahr 1 beträgt 84 % auf Basis der Preise des Jahres 1.

$$IM_1^2(P) = \frac{150 \cdot 1{,}5 + 120 \cdot 2 + 156 \cdot 3}{200 \cdot 1{,}5 + 150 \cdot 2 + 180 \cdot 3} = 0{,}8184$$

Die Mengenminderung im Jahr 2 gegenüber dem Jahr 1 beträgt 82 % auf Basis der Preise des Jahres 2.

Lösungen

8.2.4-1
a) siehe Lösungsweg

b) 6,4

c) 7 min

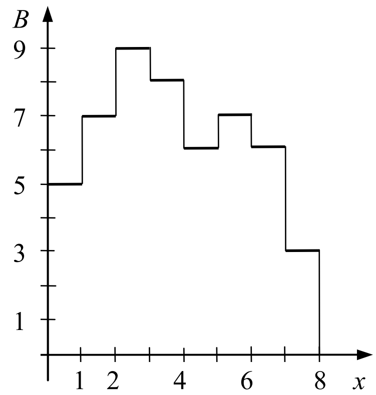
d) 3,5

Lösungsweg

8.2.4-1 Lösungsweg
a)

Haltestelle	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Einsteiger	E_i	5	3	4	3	1	3	2	1	-
Aussteiger	A_i	-	1	2	3	3	2	3	4	3
Bestand	B_i	5	7	9	8	6	7	6	3	0

Bestandsdiagramm



b) $D = 1\cdot 5 + 1\cdot 7 + 1\cdot 9 + 1\cdot 8 + 1\cdot 6 + 1\cdot 7 + 1\cdot 6 + 1\cdot 3 = 51$

Durchschnittsbestand: $\overline{D} = \dfrac{51}{8} = 6{,}375$

c) Mittlere Verweildauer: $\overline{v} = \dfrac{51}{22}\cdot 3 = 6{,}95\ \text{min}$

d) Fahrgastwechsel: $u = \dfrac{8}{2{,}3} = 3{,}45$

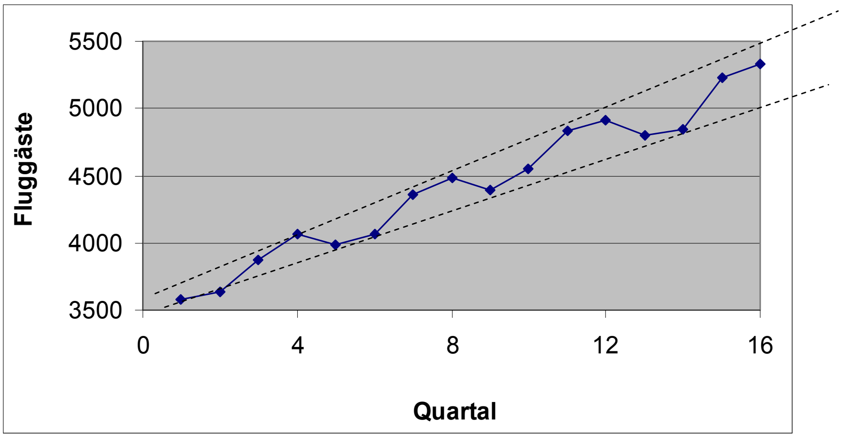
Der Fahrgastbestand wird durchschnittlich etwa 3,45-mal während einer Fahrt umgeschlagen bzw. gefüllt und wieder geleert.

8.2.5-1 Lösungsweg

Jahr	I. Quartal	II. Quartal	III. Quartal	IV. Quartal
1	3 581	3 630	3 877	4 069
2	3 982	4 061	4 360	4 485
3	4 389	4 554	4 831	4 908
4	4 795	4 848	5 224	5 332

a)
- Trendkomponenten (glatte Komponenten)
- saisonale Komponenten
- zufällige Restkomponenten

b)



Multiplikative Verknüpfung, wenn die Differenz des kleinsten und des größten Wertes pro Jahr ansteigt (die untere und obere Berührungsgerade streben auseinander).

c) Saisonbereinigte Trendwerte

Jahr	I. Quartal	II. Quartal	III. Quartal	IV. Quartal
1	-	-	3 839,38	3 943,38
2	4 057,63	4 170,00	4 272,88	4 385,38
3	4 505,88	4 617,63	4 721,25	4 808,75
4	4 894,63	4 996,75	-	-

Trendbereinigte Werte

Jahr	I. Quartal	II. Quartal	III. Quartal	IV. Quartal
1	-	-	1,0098	1,0319
2	0,9814	0,9739	1,0204	1,0227
3	0,9741	0,9862	1,0232	1,0206
4	0,9796	0,9702	-	-

Durchschnittliche Normierung:

0,9784	0,9768	1,0178	1,0251	0,9995

Saisonindex:

0,9788	0,9773	1,0183	1,0256

Zu d)

Kapitel 8	Abschnitt 8.2.5		Aufgaben ◄	

8.2.5-1 Lösungsweg Zurück

d) Jährliche Passagierzahlen:

Jahr	t	y	t^2	$t \cdot y$	y_T
1	–1,5	15 157	2,25	– 22 735,5	15 193,5
2	–0,5	16 888	0,25	– 8 444,0	16 885,5
3	0,5	18 682	0,25	9 341,0	18 577,5
4	1,5	20 199	2,25	30 298,5	20 269,5
	0,0	70 926	5,00	8 460,0	70 926,0

$y_T = 17\,731{,}5 + 1\,692t$

e) $y_T(t = 2{,}5) = 21\,961{,}5$

Quartalsdurchschnitt: 5 490,375

Aufteilung:

I. Quartal	II. Quartal	III. Quartal	IV. Quartal	gesamt
5 374,217	5 365,507	5 590,950	5 630,826	21 961,500

f) Eine Trendfunktion beschreibt nur das zeitliche Verhalten. Als Einflussgröße (Ursache) fungiert die Zeit statt aller tatsächlichen Einflussgrößen, weil diese entweder zu zahlreich oder auch unbekannt sind.

Kapitel 8	Abschnitt 8.3.2		Aufgaben ◄	

Lösungen

8.3.2-1

a) $\alpha_1 = 0{,}05: \; 14{,}785 < \mu < 15{,}215;$ $\alpha_2 = 0{,}01: \; 14{,}718 < \mu < 15{,}282$

b) 238,8 Lösungsweg

8.3.2-2

$\alpha_1 = 0{,}05: \; 14{,}776 < \mu < 15{,}224;$ $\alpha_2 = 0{,}01: \; 14{,}698 < \mu < 15{,}302$ Lösungsweg

8.3.2-1 Lösungsweg

a) $\bar{x} = 15$

$\alpha_1 = 0{,}05 \qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}959\,97$ (siehe Tafel 1) $\qquad \sigma = 0{,}6 \qquad n = 30$

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$15 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} < \mu < 15 + 0{,}214\,7$$

$$14{,}785\,3 < \mu < 15{,}214\,7$$

$\alpha_2 = 0{,}01 \qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}575\,83 \qquad \sigma = 0{,}6 \qquad n = 30$

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$15 - 2{,}575\,83 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} < \mu < 15 + 0{,}282\,17$$

$$14{,}717\,83 < \mu < 15{,}282\,17$$

b) $\delta = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{2\sigma}{\delta} \right)^2 = \left(2{,}575\,83 \cdot \dfrac{2 \cdot 0{,}6}{0{,}2} \right)^2 = 238{,}8$

8.3.2-2 Lösungsweg

$\bar{x} = 15, \quad s = 0{,}6, \quad n = 30$

$\alpha_1 = 0{,}05$

$t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{29;\,0{,}975} = 2{,}045$ (siehe Tafel 2) $\qquad \sigma = 0{,}6 \qquad n = 30$

$$\bar{x} - t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$15 - 2{,}045 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} < \mu < 15 + 0{,}224$$

$$14{,}776 < \mu < 15{,}224$$

$\alpha_2 = 0{,}01 \qquad t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{29;\,0{,}995} = 2{,}756 \qquad \sigma = 0{,}6 \qquad n = 30$

$$\bar{x} - t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$15 - 2{,}756 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} < \mu < 15 + 0{,}302$$

$$14{,}698 < \mu < 15{,}302$$

Lösungen

8.3.3-1 Die Abweichung ist nicht signifikant.

8.3.3-2 Das Angebot ist nicht glaubwürdig.

8.3.3-3 Es ist keine signifikante Abweichung festzustellen. Lösungswege 8.3.3-1 bis 8.3.3-3

8.3.3-4 Die Abweichung der Mittelwerte ist nicht signifikant. Lösungsweg

8.3.3-5 Es kann bei einer Sicherheit von 95 % eine Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen nicht ausgeschlossen werden. Lösungsweg

8.3.3-6 Es besteht mit einer Sicherheit von 95 % keine Unabhängigkeit, sondern eine Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen. Lösungsweg

8.3.3-1 Lösungsweg
z-Test
Annahme gleicher Varianzen für die beiden Grundgesamtheiten.

(1) $H_0: \ \mu_0 = 2{,}21$

(2) $\alpha = 0{,}01$

(3) $u = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{2{,}14 - 2{,}21}{0{,}61}\sqrt{7} = \dfrac{-0{,}07}{0{,}61}\sqrt{7} = -0{,}304$

(5) $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}995} = 2{,}575\,83$ (siehe Tafel 1)

(6) $|u| = 0{,}304 < 2{,}576 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, also Annahme von H_0.

Die Abweichung ist mit einer statistischen Sicherheit von 0,99 nicht signifikant.

8.3.3-2 Lösungsweg
t-Test (Unbekannte Varianz der Grundgesamtheit)

(1) $H_0: \ \mu_0 = 6{,}8$

(2) $\alpha = 0{,}05$

(3) $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \dfrac{7{,}4 - 6{,}8}{0{,}5}\sqrt{25} = \dfrac{0{,}6}{0{,}5} \cdot 5 = 6$

(5) $t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{24;0{,}975} = 2{,}064$ (siehe Tafel 2)

(6) $|u| = 6 \geq 2{,}064 = t_{M,1-\frac{\alpha}{2}}$, also Ablehnung von H_0.

Das Angebot ist mit einer statistischen Sicherheit von 0,95 nicht glaubwürdig.

8.3.3-3 Lösungsweg
t-Test (Unbekannte Varianz der Grundgesamtheit)

(1) $H_0: \ \mu_0 = 2{,}19$

(2) $\alpha = 0{,}05$

(3) $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \dfrac{72{,}24 - 2{,}19}{0{,}2}\sqrt{7} = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} \cdot \sqrt{7} = 0{,}66$

(5) $t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6;0{,}975} = 2{,}447$ (siehe Tafel 2)

(6) $|u| = 0{,}66 < 2{,}447 = t_{M,1-\frac{\alpha}{2}}$, also Annahme von H_0.

Es ist keine signifikante Abweichung festzustellen.

8.3.3-4 Lösungsweg
Doppel-*t*-Test
Gleiche Varianzen für die beiden Grundgesamtheiten.
$H_0: \ E(B_1) = E(B_2)$ mit $m = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 7 - 2 = 11$, $\alpha = 0{,}05$

$\bar{x}_1 = 2{,}685 \qquad s_1^{\ 2} = 0{,}000\,110$

$\bar{x}_2 = 2{,}666 \qquad s_2^{\ 2} = 0{,}000\,395$

$$u = \frac{2{,}685 - 2{,}666}{\sqrt{5 \cdot 0{,}000\,11 + 6 \cdot 0{,}000\,395}} \sqrt{\frac{6 \cdot 7 \cdot 11}{13}} = \frac{0{,}019}{\sqrt{0{,}000\,292}} \sqrt{35{,}54} = 2{,}096$$

$t_{M,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{11;0{,}975} = 2{,}201$ (siehe Tafel 2)

$|u| = 2{,}096 < 2{,}201 = t_{M,1-\frac{\alpha}{2}}$, also Annahme von H_0.

Die Abweichung der Mittelwerte ist mit einer statistischen Sicherheit von 0,95 nicht signifikant.

8.3.3-5 Lösungsweg

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

(1) Nullhypothese H_0: Geschlecht und Bewertung sind stochastisch unabhängig.

(2) Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$

(3) Vollständige Tabelle mit Randhäufigkeiten

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	5	20	35	25	7	92
weiblich	8	31	24	20	5	88
Summe	13	51	59	45	12	180

Bestimmung der Werte für die totale Unabhängigkeit

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	6,64	26,07	30,16	23,00	6,13	92
weiblich	6,36	24,93	28,84	22,00	5,87	88
Summe	13	51	59	45	12	180

(4) Ermittlung der Testgröße

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	0,41	1,41	0,78	0,17	0,12	2,89
weiblich	0,43	1,48	0,81	0,18	0,13	3,03
Summe	0,83	2,89	1,59	0,36	0,25	5,92

Testgröße $u = 5{,}92$

(5) Ermittlung des kritischen Wertes für $M = 4$ und $1 - \alpha = 0{,}95$: $c = 9{,}488$ (Tafel 3)

Da $c > u$ gilt, kann die Hypothese nicht abgelehnt werden.

Damit kann bei einer Sicherheit von 95 % eine Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen nicht ausgeschlossen werden.

8.3.3-6 Lösungsweg

Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

(1) Nullhypothese H_0: Geschlecht und Bewertung sind stochastisch unabhängig.

(2) Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$

(3) Vollständige Tabelle mit Randhäufigkeiten

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	6	20	29	27	10	92
weiblich	7	37	24	15	5	88
Summe	13	57	53	42	15	180

Bestimmung der Werte für die totale Unabhängigkeit

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	6,64	29,13	27,09	21,47	7,67	92
weiblich	6,36	27,87	25,91	20,53	7,33	88
Summe	13	57	53	42	15	180

(4) Ermittlung der Testgröße

Note	1	2	3	4	5	Summe
männlich	0,06	2,86	0,13	1,43	0,71	5,19
weiblich	0,07	2,99	0,14	1,49	0,74	5,43
Summe	0,13	5,85	0,27	2,92	1,45	10,62

Testgröße $u = 10{,}62$

(5) Ermittlung des kritischen Wertes für $M = 4$ und $1 - \alpha = 0{,}95$: $c = 9{,}488$ (Tafel 3)

Da $u > c$, wird die Hypothese H_0 abgelehnt.

Damit besteht mit einer Sicherheit von 95 % keine Unabhängigkeit, sondern eine Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen.

Operations Research: Transportproblem, Zuordnungsproblem

9.1-1 Aufgabe

Vier Erzeuger beliefern drei Verbraucher. Die spezifischen Transportkosten in €/t, die Aufkommens- und Verbrauchsmengen ***a*** bzw. ***b*** in t sind in folgender Tabelle gegeben:

C	V_1	V_2	V_3	***a***
E_1	5	3	7	35
E_2	2	8	4	55
E_3	4	10	5	25
E_4	4	6	9	45
b	40	60	50	

Berechnen Sie die optimale Lösung und die minimalen Transportkosten.
Hinweis: Da das Problem nicht abgesättigt ist, ist ein fiktiver Verbraucher erforderlich.

9.1-2 Aufgabe

6 Kiesgruben E_i beliefern 4 Betonwerke V_j mit Kies. Dabei hat das vierte Betonwerk aufgrund der Produktionsvorgaben besondere Qualitätsanforderungen an den Kies, den nur die Gruben 1 und 3 erfüllen. Die spezifischen Transportkosten in €/t , das Aufkommen ***a*** und der Bedarf ***b*** (jeweils in t) sind in der folgenden Tabelle gegeben.

C	V_1	V_2	V_3	V_4	***a***
E_1	3	7	4	4	16
E_2	1	2	9	3	20
E_3	4	7	3	8	14
E_4	3	9	4	5	14
E_5	4	6	2	3	16
E_6	3	10	5	7	10
b	30	20	15	25	90

Berechnen Sie die optimale Lösung und die minimalen Transportkosten.

9.1-3 Aufgabe

Auf vier Baustellen steht je ein Kran, der nicht mehr benötigt wird. Vier andere Baustellen benötigen je einen Kran. Wie sind die Kräne umzusetzen, damit deren Transportstrecke minimal wird? (Angaben in km)

Baustelle	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	2	1	4
A_2	5	6	3	7
A_3	8	2	4	6
A_4	3	9	2	8

Hinweis: Lösen Sie die Aufgabe mit der VAM/Potentialmethode und mit der Ungarischen Methode.

Operations Research: Rundreiseproblem

9.2-1 Aufgabe
Ein Entsorgungsunternehmen eines Landkreises hat in einer Tour fünf Orte A, B, C, D, E anzufahren, wobei der Ort A Start- und Zielort ist. Die Entfernung zwischen den einzelnen Orten ist in der folgenden Entfernungstabelle in km gegeben (Entfernungsmatrix).

	A	B	C	D	E
A	0	16	15	27	32
B	16	0	30	28	41
C	15	30	0	14	17
D	27	28	14	0	13
E	32	41	17	13	0

In welcher Reihenfolge sind die einzelnen Orte anzufahren, damit die zurückgelegte Entfernung minimal wird? Bestimmen Sie diese minimale Entfernung.

Operations Research: Reihenfolgemodelle

9.3-1 Aufgabe
Es sollen mit 5 Maschinen 5 Produkte hergestellt werden. Die Produkte durchlaufen dabei die Maschinen M_1 bis M_5 in Reihenfertigung. Die Bearbeitungszeiten in Minuten sind in der folgenden Tabelle gegeben. In welcher Reihenfolge sind die Produkte zu bearbeiten, damit die Gesamtbearbeitungszeit ein Minimum wird?
Bestimmen Sie eine Näherungslösung und geben sie die Gesamtbearbeitungszeit an.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
P_1	0	13	19	6	15
P_2	4	10	0	19	18
P_3	13	0	0	23	5
P_4	10	0	15	0	7
P_5	6	17	0	8	22

Operations Research: Netzplanmodelle

9.4-1 Aufgabe
Bei der Einführung eines neuen Produkts sind folgende Teilprozesse erforderlich:

Bezeichnung	**Aktivität**	**Vorgänger**	**Dauer** (Tage)
A	Entwurf	-	60
B	Voruntersuchungen	-	40
C	Bau eines Modells	A	80
D	Produktionsvorbereitung	A, B	40
E	Herstellen eines Erstprodukts	C, D	120
F	Ausarbeitung der Produktionsunterlagen	C, D	30
G	Erproben des Erstprodukts	E	60
H	Überleiten in die Produktion	F, G	80

Ermitteln Sie den kritischen Weg und die minimale Prozessdauer.

Operations Research: Standortproblem

9.5-1 Aufgabe
Eine große Handelskette möchte ein Zwischenlager zur Belieferung von Supermärkten errichten. Die Supermärkte befinden sich an Standorten mit den folgenden Koordinaten in einem (x, y) - Koordinatensystem (Angaben in km): (30, 80); (90, 80); (80, 30); (30, 40)
Die täglichen Liefermengen (in t) an diese 4 Standorte betragen in der oben genanten Reihenfolge 30, 60, 70, 40.

a) Skizzieren Sie die Standorte in einem (x, y) - Koordinatensystem.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Standortes für das Zwischenlager, der den geringsten Transportaufwand (in t·km) für den täglichen Transport erfordert.

Operations Research: Lagerhaltung

9.6-1 Aufgabe
Ein Unternehmen hat an einem bestimmten Gut einen jährlichen Bedarf von 10 000 kg. Die Kosten je Lieferung betragen 150 €, der Preis je kg ist 0,20 €. Die Lagerkosten haben eine Höhe von 4 € je kg und Jahr. Der Verbrauch erfolgt zeitlich gleichmäßig.
Lösen Sie das Lagerhaltungsproblem ((T, z) - Politik), wenn

a) Fehlmengen nicht zugelassen und Bestellungen in beliebiger Höhe möglich sind
b) Fehlmengen nicht zugelassen und Bestellungen nur in Containern mit je 200 kg realisiert werden können
c) die Fehlmengenkosten 20 € je kg und Jahr betragen und Bestellungen in beliebiger Höhe möglich sind
d) die Fehlmengenkosten 20 € betragen und Lieferbedingungen wie unter b)
e) wie unter a) aber es wird Mengenrabatt* gewährt
f) wie unter b) aber es wird Mengenrabatt* gewährt.

* Mengenrabatt: 0,20 € ab 1 kg, 0,18 € ab 600 kg, 0,162 € ab 1200 kg.

Operations Research: Standardmodell für offene Wartesysteme

9.7-1 Aufgabe

Bei der Untersuchung in einer Werkzeugausgabe eines mittelständischen Unternehmens wurden die folgenden Werte ermittelt:
Durchschnittlich treffen 45 Forderungen in einer Stunde ein (poissonverteilt).
Die durchschnittliche Bedienzeit beträgt 70 s je Forderung (exponentialverteilt).

a) Wie viele Ausgabestellen sind mindestens erforderlich, um alle Forderungen bedienen zu können?
b) Für diese Mindestzahl sind Verkehrswert, Leerwahrscheinlichkeit, mittlere Schlangenlänge, Wartezeit und Verweilzeit zu bestimmen.
c) Wie ändert sich die Schlangenlänge bei konstanter Bediendauer?
d) Die Verweilzeit kostet 15 €/h, jede Bedienstelle 24 €/h.
   Wie viele Bedienstellen sind wirtschaftlich sinnvoll?

9.7-2 Aufgabe

Für einen Containerumschlagplatz, auf dem rund um die Uhr gearbeitet wird, sind die folgenden Angaben bekannt: Durchschnittlich treffen täglich 5 Schiffe ein (poissonverteilt).
Die durchschnittliche Ent- und Beladezeit ist exponentialverteilt beträgt 6 Stunden je Schiff.

a) Wie viele Liegeplätze sind mindestens erforderlich, um alle Schiffe ent- und beladen zu können?
b) Für diese Mindestzahl sind Verkehrswert, Leerwahrscheinlichkeit, mittlere Schlangenlänge, Wartezeit und zu bestimmen.
c) Durch Veränderung der Ent- und Beladungstechnologie würde die Ent- und Beladungszeit konstant 7 Stunden je Schiff betragen. Welchen Einfluss hätte dieses auf die mittlere Schlangenlänge?
d) Ein Tag Wartezeit auf Reede kostet 15 000 €, die Kosten einer zusätzlichen Anlegestelle werden auf jährlich 5 Mio. € geschätzt. Wie viele Anlegeplätze sind wirtschaftlich sinnvoll?

Lösungen

9.1-1 580 T€

9.1-2 302 €

9.1-3 12 km

9.2-1 89 km

9.3-1 106 min

9.4-1 400 Tage

9.5-1 b) (71, 48); Min.: 6 873 t·km (jeweils gerundet)

9.6-1 Minimale Kosten in €:

a) 5 464,10 b) 5 475,00 c) 5 162,28

d) 5 166,67 e) 5 264,10 f) 5 270,00

9.7-1 a) $s = 1$ b) 0,875; 0,125; 6,125; 8,167; 9,333
c) 3,063 d) $s = 2$

9.7-2 a) $s = 2$ b) 1,25; 0,231; 0,801; 0,16; c) 0,828
d) $s = 2$